量子純粋状態の熱平衡化のシナリオを巡って

白石直人　（慶應 理工）

N. Shiraishi and T. Mori, Phys. Rev. Lett. 119, 030601 (2017)
T. Mori and N. Shiraishi, Phys. Rev. E 96, 022153 (2017)
N. Shiraishi, arXiv:1803.02637 (2018)

アウトライン

研究背景：孤立量子系の熱化の問題とETH

ETHを破る非可積分系の構成

ETHを破る非可積分系の熱化

熱平衡化の新しいシナリオに向けて

アウトライン

研究背景：孤立量子系の熱化の問題とETH

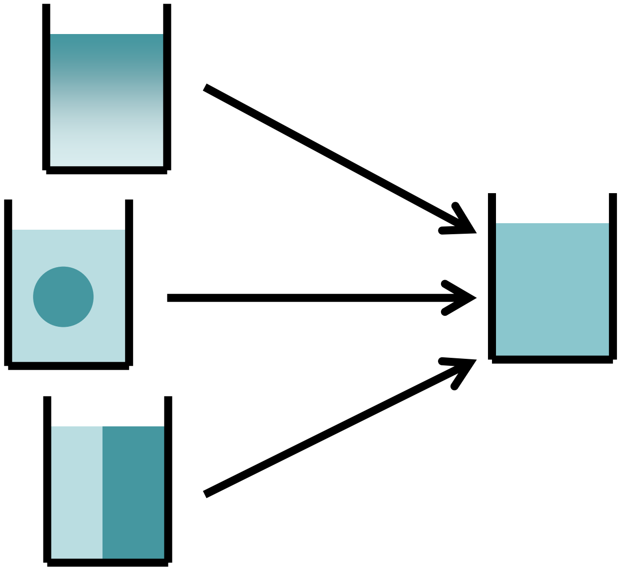
ETHを破る非可積分系の構成

ETHを破る非可積分系の熱化

熱平衡化の新しいシナリオに向けて

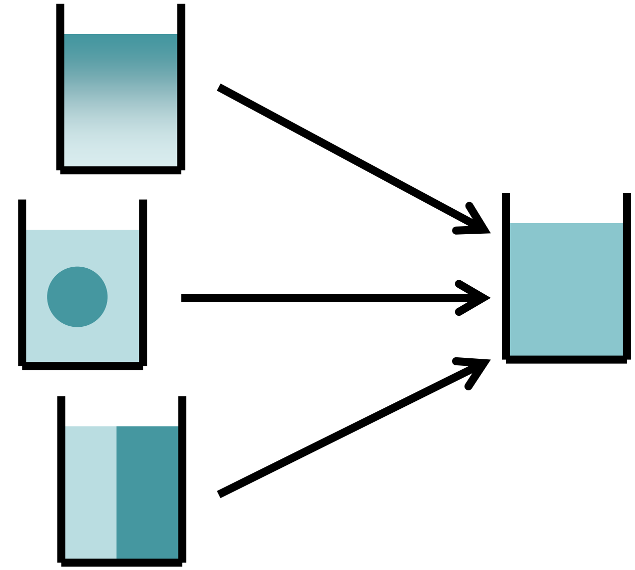
マクロ系の熱化

熱化
マクロな系の非平衡状態は単一の平衡状態に緩和する。



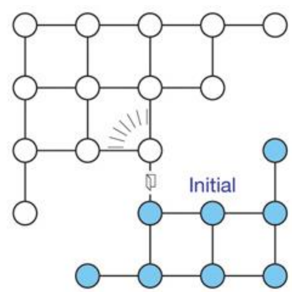
マクロ系の熱化

熱化
マクロな系の非平衡状態は単一の平衡状態に緩和する。

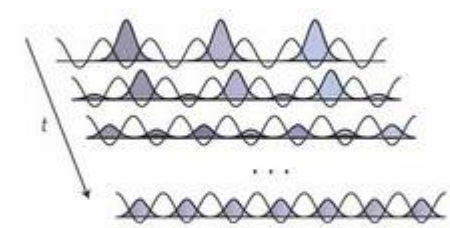


孤立した**量子系の**
純粋状態も熱化する

Numerical simulation



Experiment



(M. Rigol, V. Dunjko & M. Olshanii, Nature **452**, 854 (2008),
M. Gring, et.al., Science 348, 207 (2015))

熱化の定義

定義：熱的な状態

状態$|\psi\rangle$が熱的＝マクロ物理量Oを見ている限り、ギブス分布と区別がつかないこと

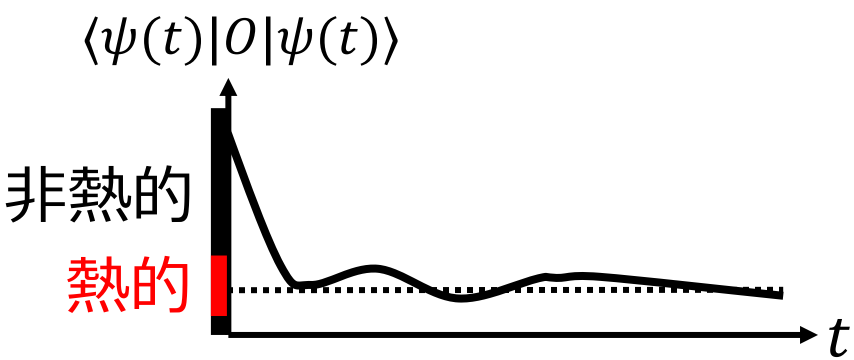
$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \simeq \mathrm{Tr}[\hat{O}\rho_{eq}]$$

熱化の定義

定義：熱的な状態

状態$|\psi\rangle$が熱的＝マクロ物理量Oを見ている限り、ギブス分布と区別がつかないこと

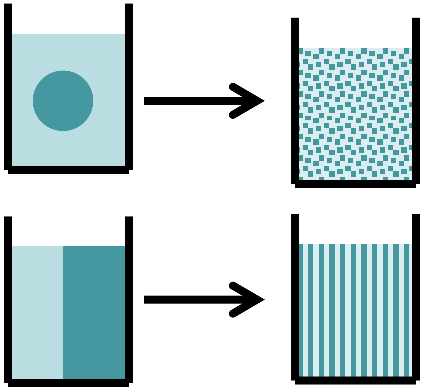
$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \simeq \mathrm{Tr}[\hat{O}\rho_{eq}]$$



熱化：熱的な状態への緩和

なぜ、ある系は熱化せず、他の系は熱化するのか

しかし**熱化しない**系も存在する
(これらの系は初期状態に依存した状態に緩和する)



Ex) <u>可積分系</u>

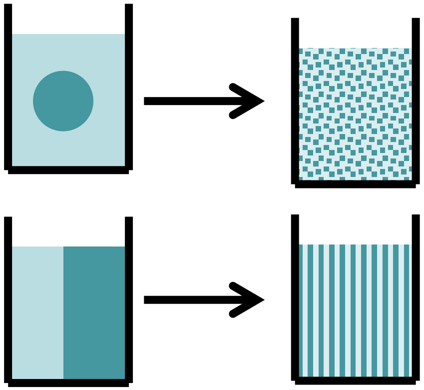
- Free Fermion
- Bethe仮設

<u>局在した系</u>

- Anderson localization
- Many body localization

なぜ、ある系は熱化せず、他の系は熱化するのか

しかし**熱化しない**系も存在する
(これらの系は初期状態に依存した状態に緩和する)



Ex) <u>可積分系</u>

- Free Fermion
- Bethe仮設

<u>局在した系</u>

- Anderson localization
- Many body localization

問い：**何が熱化する／しないを決めるのか？**

熱化を決める性質の候補: ETH

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

すべてのエネルギー固有状態は熱的である

$\langle E_n|\hat{O}|E_n\rangle \simeq \mathrm{Tr}[\hat{O}\rho_{eq}]$ ($\hat{O}$: マクロ物理量)

(J. von Neuman, Z. Phys. 57, 30 (1929), J. M. Deutsch, PRA 43, 2046 (1991),
M. Srednicki, PRE 50, 888 (1994), H. Tasaki, PRL 80, 1373 (1998),
M. Rigol, V. Dunjko & M. Olshanii, Nature **452**, 854 (2008))

ETHが成り立てば熱化することは証明できる。

weak-ETH

ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的

（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

weak-ETHでは不十分！

<u>weak-ETH</u>
ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的
（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！
→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**
(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

weak-ETHでは不十分！

weak-ETH

ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的

（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！

→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**

(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

可積分系では何が起きているのか?

weak-ETHでは不十分！

<u>weak-ETH</u>
ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的
（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！
→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**
(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

<u>可積分系では何が起きているのか?</u>

weak-ETHでは不十分！

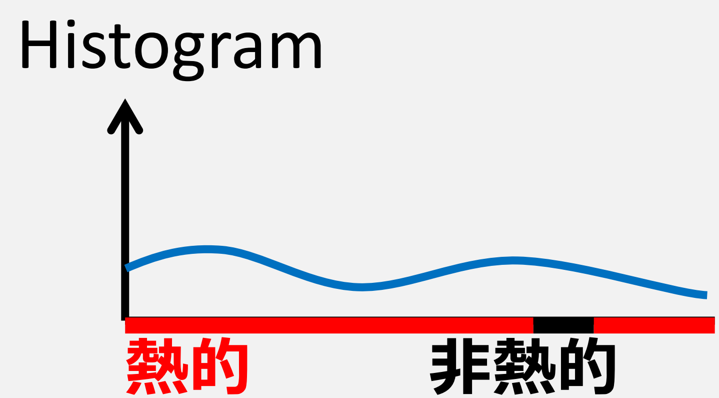
weak-ETH

ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的
（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！
→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**

(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

可積分系では何が起きているのか?



weak-ETHでは不十分！

weak-ETH

ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的

（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！

→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**

(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

可積分系では何が起きているのか?

weak-ETHでは不十分！

weak-ETH

ほとんどすべてのエネルギー固有状態は熱的

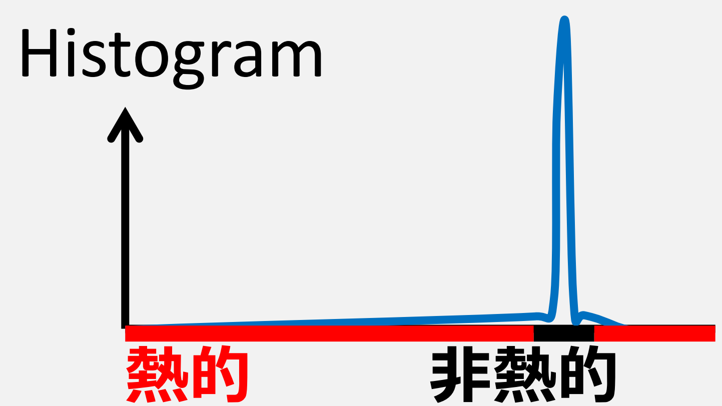
（熱的でない固有状態の割合は指数的に小さい）

これは**可積分系**でも成り立つ！

→**weak-ETHは熱化を示すには不十分**

(T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016))

可積分系では何が起きているのか?



ETHについて知られていること

- **ETHが成り立つ系は熱化する**

ETHについて知られていること

- **ETHが成り立つ系は熱化する**
- **多くの複雑な（非可積分、非局在の）系はETHを満たす**

  L. F. Santos and M. Rigol, Phys. Rev. E 81, 036206 (2010).
  R. Steinigeweg, J. Herbrych, and P. Prelovsek, Phys. Rev. E 87, 012118 (2013).
  H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, Phys. Rev. E 90, 052105 (2014).
  W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, Phys. Rev. E 89, 042112 (2014).

ETHについて知られていること

- **ETHが成り立つ系は熱化する**
- **多くの複雑な（非可積分、非局在の）系はETHを満たす**

  L. F. Santos and M. Rigol, Phys. Rev. E 81, 036206 (2010).
  R. Steinigeweg, J. Herbrych, and P. Prelovsek, Phys. Rev. E 87, 012118 (2013).
  H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, Phys. Rev. E 90, 052105 (2014).
  W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, Phys. Rev. E 89, 042112 (2014).

- **既存のETHを満たさない系は、熱化しない**

  - 可積分系（局所保存量がある系）
  - 局在した系

ETHに対する予想

予想

ETHに対する予想

予想

(1) 以下を満たす複雑な系はETHを満たす

- 非可積分（局所保存量がない）
- 並進対称（→局在がない）
- 局所相互作用

複雑な系 ➡ ETH ➡ 熱化する

ETHに対する予想

予想

(1) 以下を満たす複雑な系はETHを満たす
- 非可積分（局所保存量がない）
- 並進対称（→局在がない）
- 局所相互作用

(2) ETHは熱化の必要条件である

複雑な系 ⇨ ETH ⇨ 熱化する

no ETH ⇨ 熱化しない

ETHに対する予想

予想

(1) 以下を満たす[illegible]系はETHを満たす

- 非可積分（[illegible]がない）
- 並進対称（→局在か[illegible]い）
- 局所相互作用

(2) ETHは熱化の必[illegible]件である

複雑な系 ⇨ ETH ⇨ 熱化する

[illegible]TH ⇨ 熱化しない

アウトライン

研究背景：孤立量子系の熱化の問題とETH

ETHを破る非可積分系の構成

ETHを破る非可積分系の熱化

熱平衡化の新しいシナリオに向けて

反例の構成: Trial Hamiltonian

周期境界、長さLの**1次元 spin-1 系** を考える

射影演算子: $P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$

反例の構成: Trial Hamiltonian

周期境界、長さLの**1次元 spin-1 系** を考える

射影演算子: $P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{H_{\mathrm{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z}$$

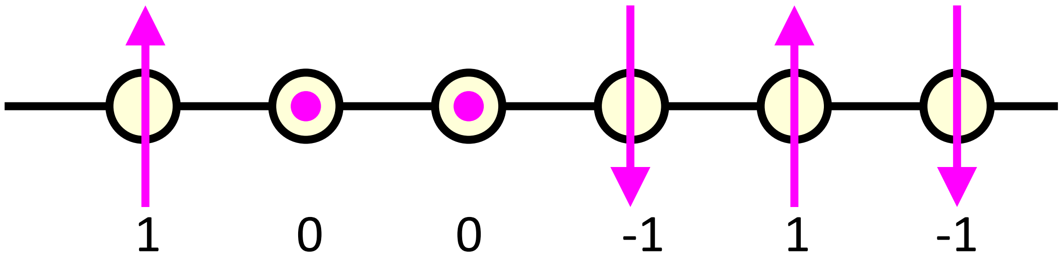
h_i: 任意の局所ハミルトニアン

Ex) $h_i = S_{i-1}^+ S_{i+1}^- + S_{i-1}^- S_{i+1}^+$

射影演算子の役割

$$H_{\text{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z \qquad P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

H_{trial}が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える

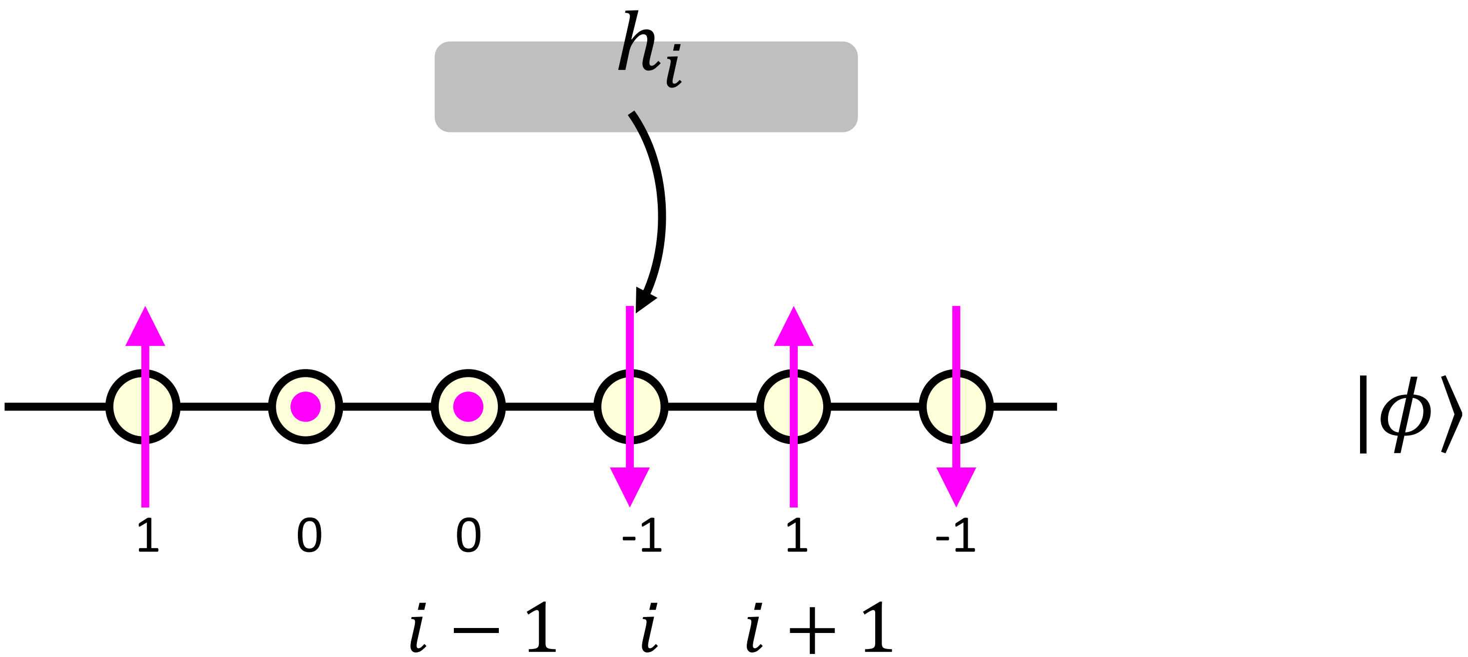


$|\phi\rangle$

射影演算子の役割

$$H_{\mathrm{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z \qquad P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

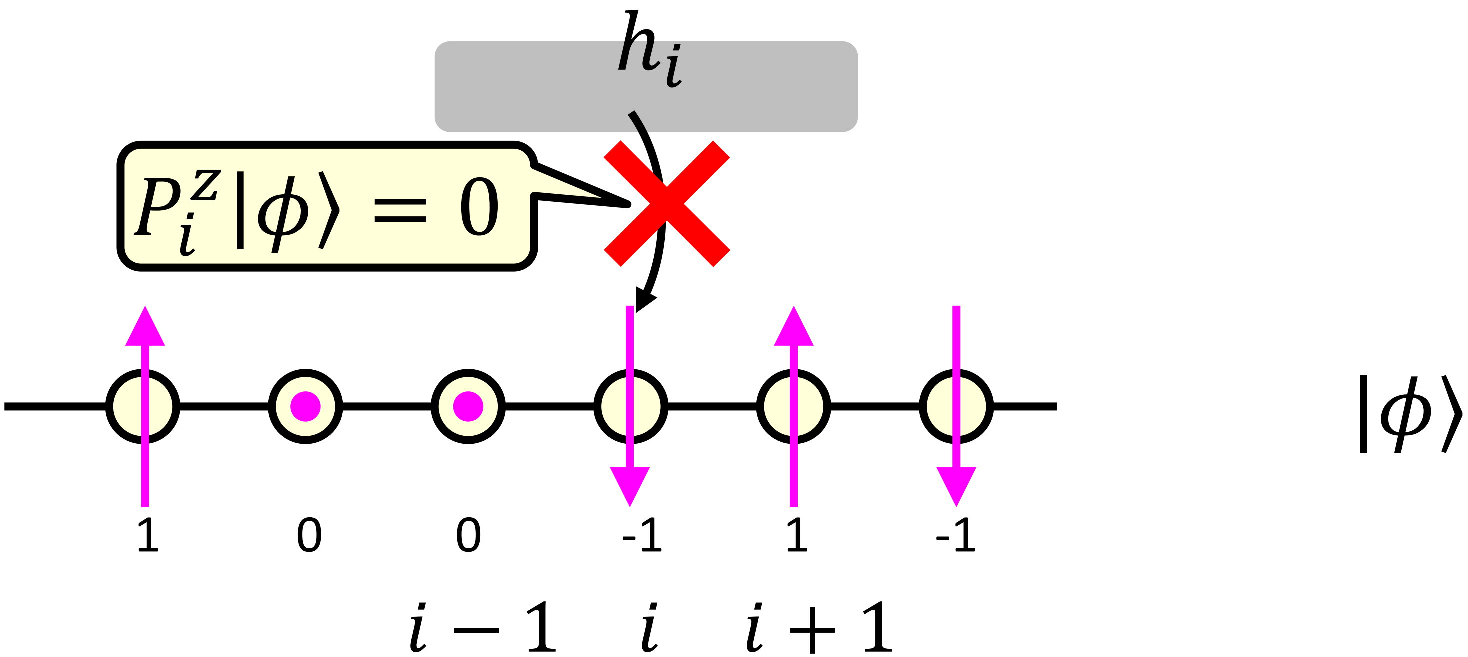
H_{trial} が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える



射影演算子の役割

$$H_{\mathrm{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z \qquad P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

H_{trial} が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える

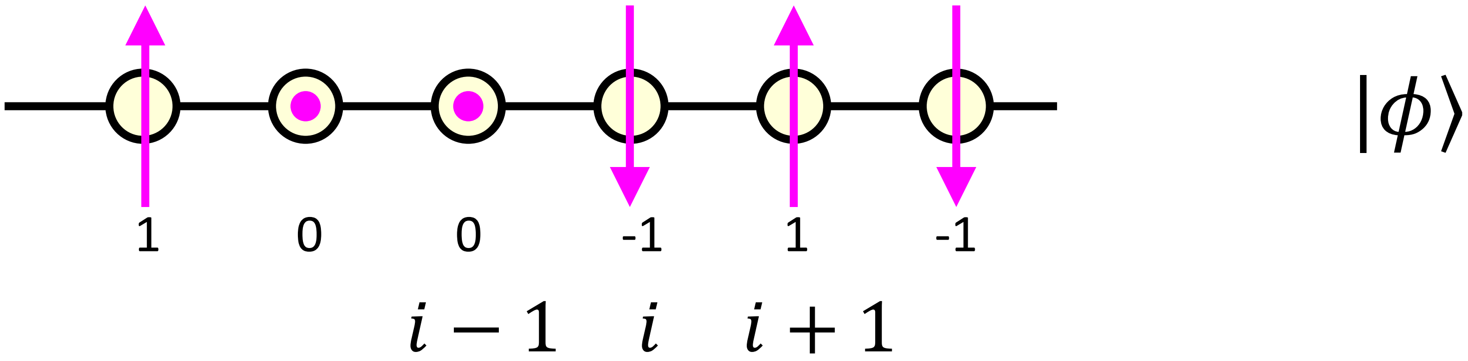


射影演算子の役割

$H_{\mathrm{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z$

$$P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

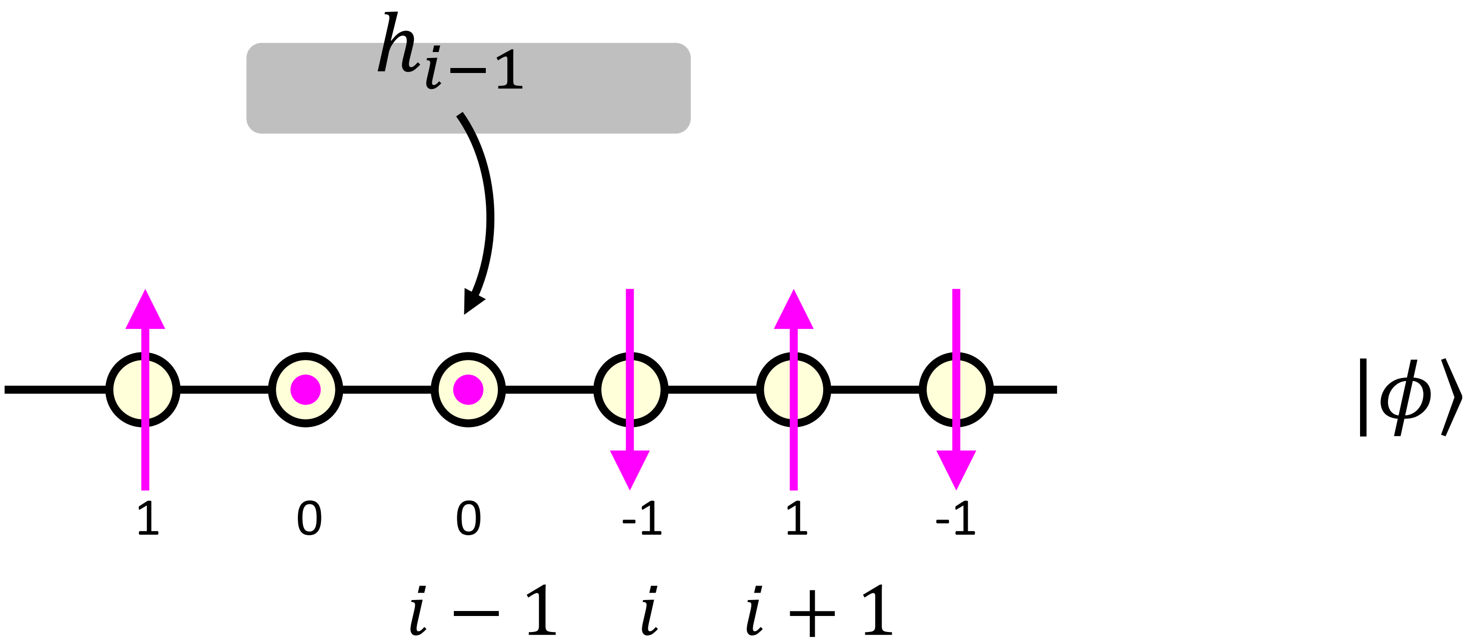
H_{trial} が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える



射影演算子の役割

$$H_{\mathrm{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z \qquad P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

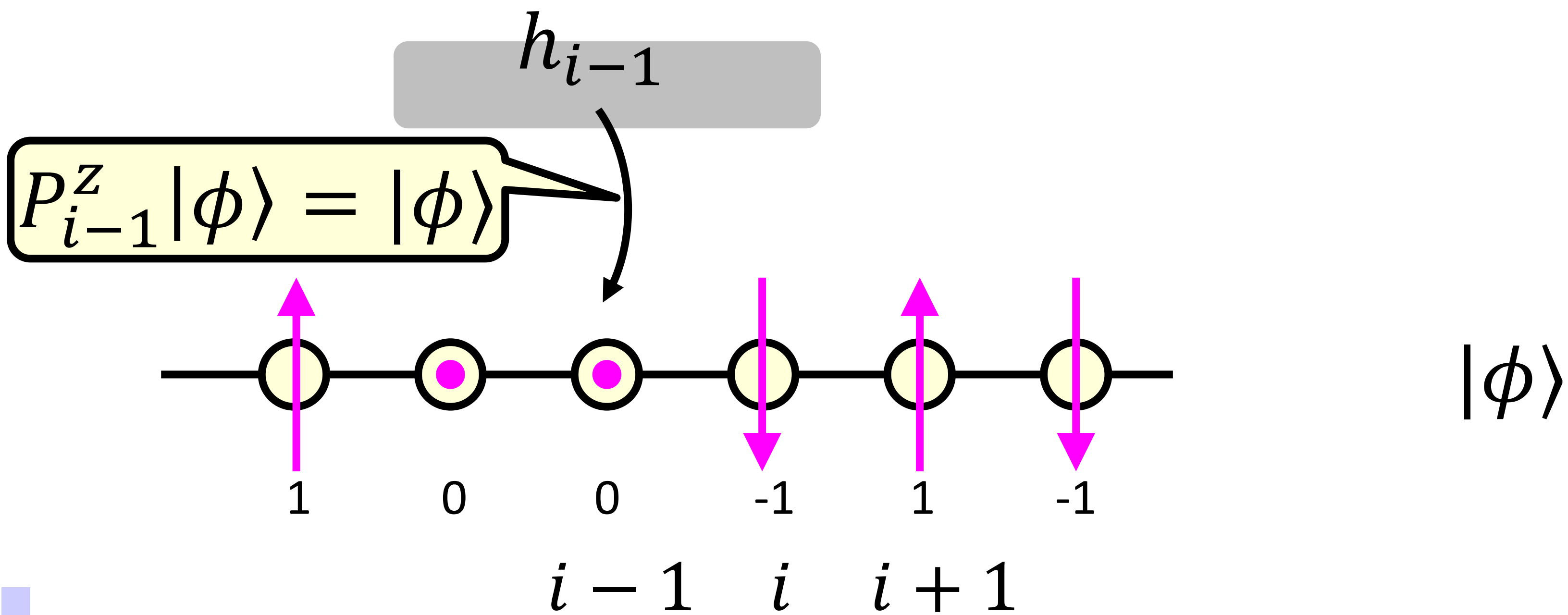
H_{trial}が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える



射影演算子の役割

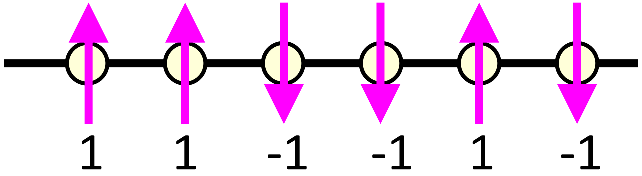
$$H_{\text{trial}} = \sum_i P_i^z h_i P_i^z \qquad P_i^z = \begin{cases} 0: & S_i^z = \pm 1 \\ 1: & S_i^z = 0 \end{cases}$$

H_{trial} が$|\phi\rangle$にどう作用するのかを考える



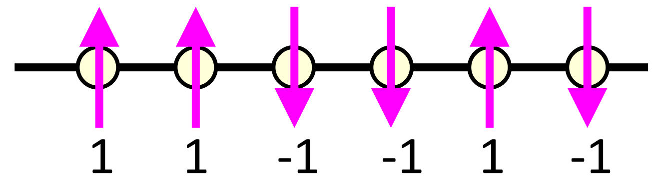
ゼロエネルギーの非熱的固有状態

$\mathcal{T}$: 全スピンが± 1の状態の集合

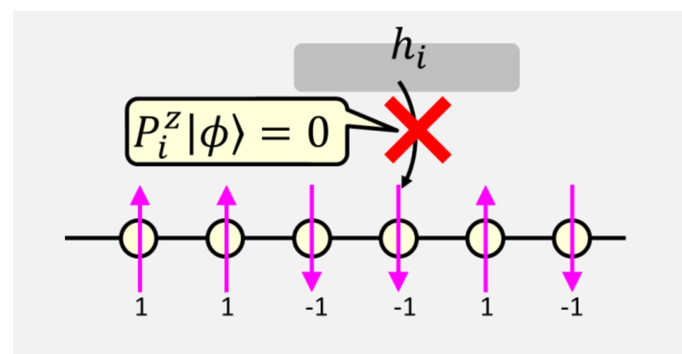


ゼロエネルギーの非熱的固有状態

$\mathcal{T}$: 全スピンが±1の状態の集合

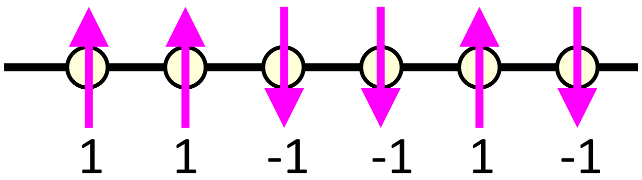


これらはH_{trial}のゼロエネルギーの固有状態！
(∵ $|\psi\rangle \in \mathcal{T}$ は全iで$\boldsymbol{P_i^z|\psi\rangle = 0}$なので).

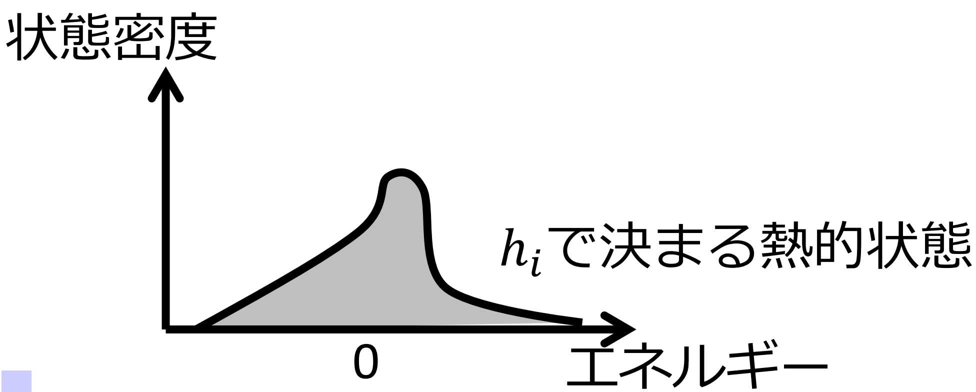


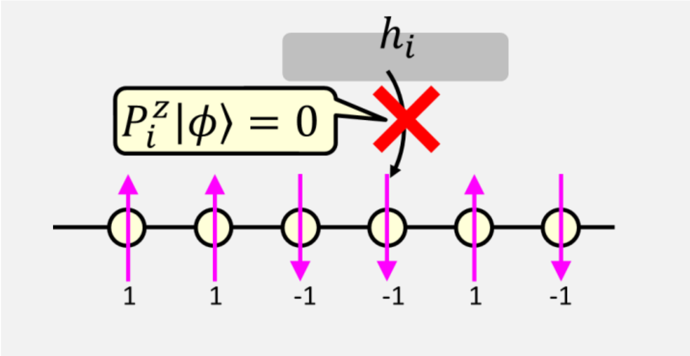
ゼロエネルギーの非熱的固有状態

$\mathcal{T}$: 全スピンが±1の状態の集合



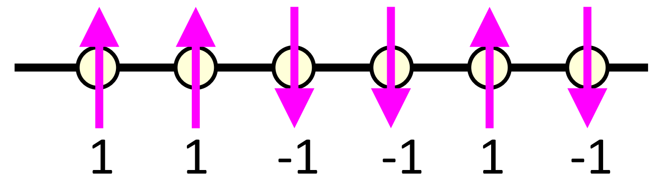
これらはH_{trial}のゼロエネルギーの固有状態！
(∵ $|\psi\rangle \in \mathcal{T}$ は全iで$\boldsymbol{P_i^z|\psi\rangle = 0}$なので).



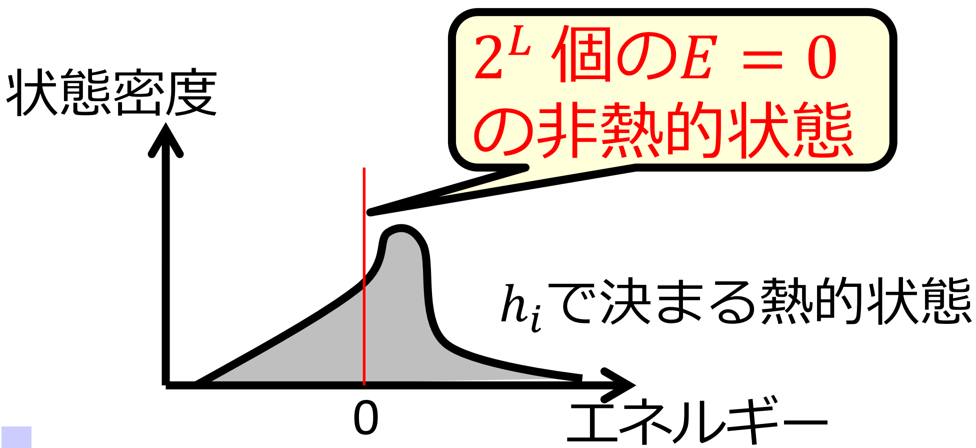


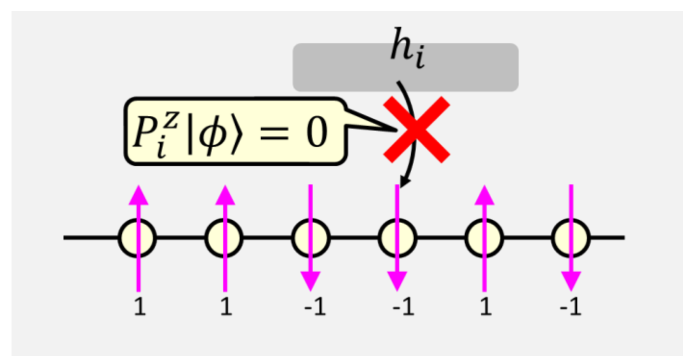
ゼロエネルギーの非熱的固有状態

$\mathcal{T}$: 全スピンが± 1の状態の集合



これらはH_{trial} のゼロエネルギーの固有状態！
($\because |\psi\rangle \in \mathcal{T}$ は全iで$\boldsymbol{P_i^z|\psi\rangle = 0}$ なので).





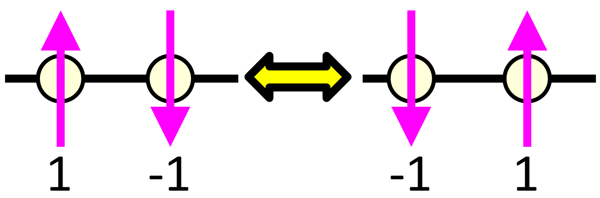
2^L重縮退を解く

2^L重縮退を解く

$$\boldsymbol{H} = \sum_i \boldsymbol{P_i^z h_i P_i^z} + \boldsymbol{H'}$$

H': $|1\rangle$ と$|-1\rangle$にのみ作用する任意ハミルトニアン

Ex)

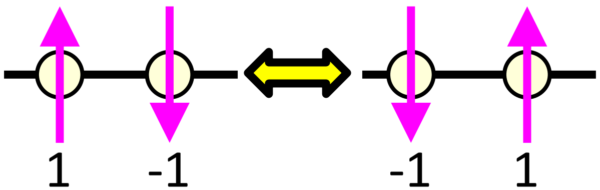


2^L重縮退を解く

$$\boldsymbol{H} = \sum_i \boldsymbol{P_i^z h_i P_i^z} + \boldsymbol{H'}$$

H': $|1\rangle$ と$|-1\rangle$にのみ作用する任意ハミルトニアン

Ex)



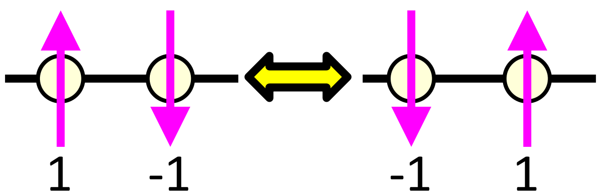
If $|\psi\rangle \in \mathcal{T}$, then $H'|\psi\rangle \in \mathcal{T}$.

2^L重縮退を解く

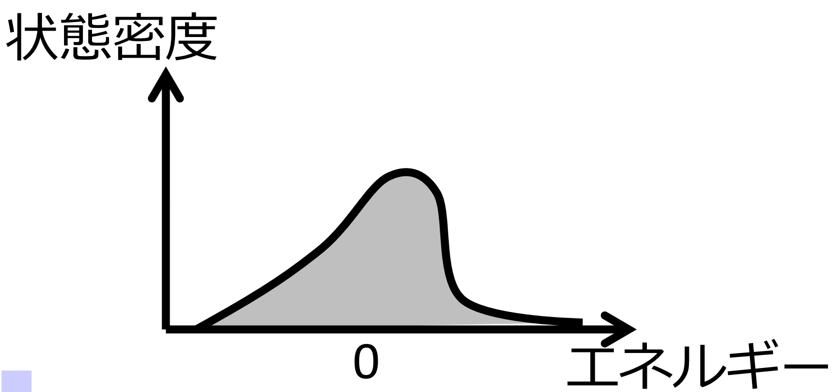
$$H = \sum_i P_i^z h_i P_i^z + H'$$

H': $|1\rangle$ と$|-1\rangle$にのみ作用する任意ハミルトニアン

Ex)



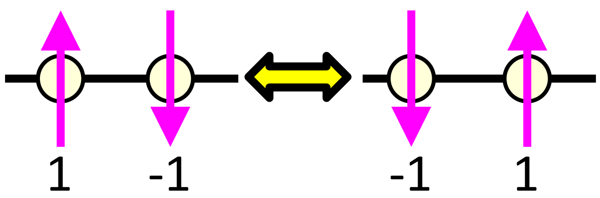
If $|\psi\rangle \in \mathcal{T}$, then $H'|\psi\rangle \in \mathcal{T}$.



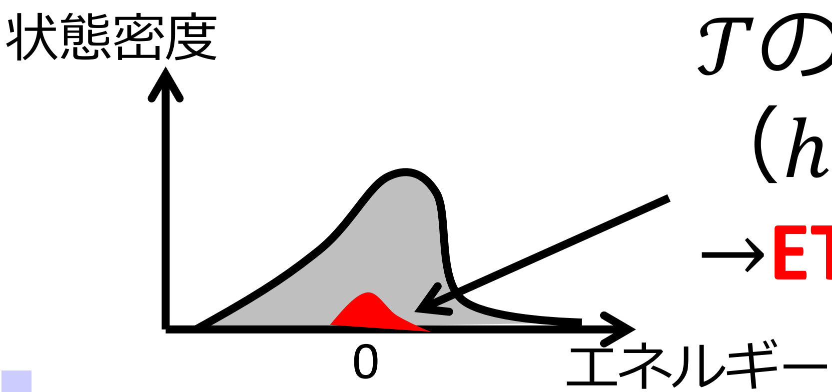
2^L重縮退を解く

$$H = \sum_i P_i^z h_i P_i^z + H'$$

H': $|1\rangle$ と$|-1\rangle$にのみ作用する任意ハミルトニアン

Ex) 

If $|\psi\rangle \in \mathcal{T}$, then $H'|\psi\rangle \in \mathcal{T}$.



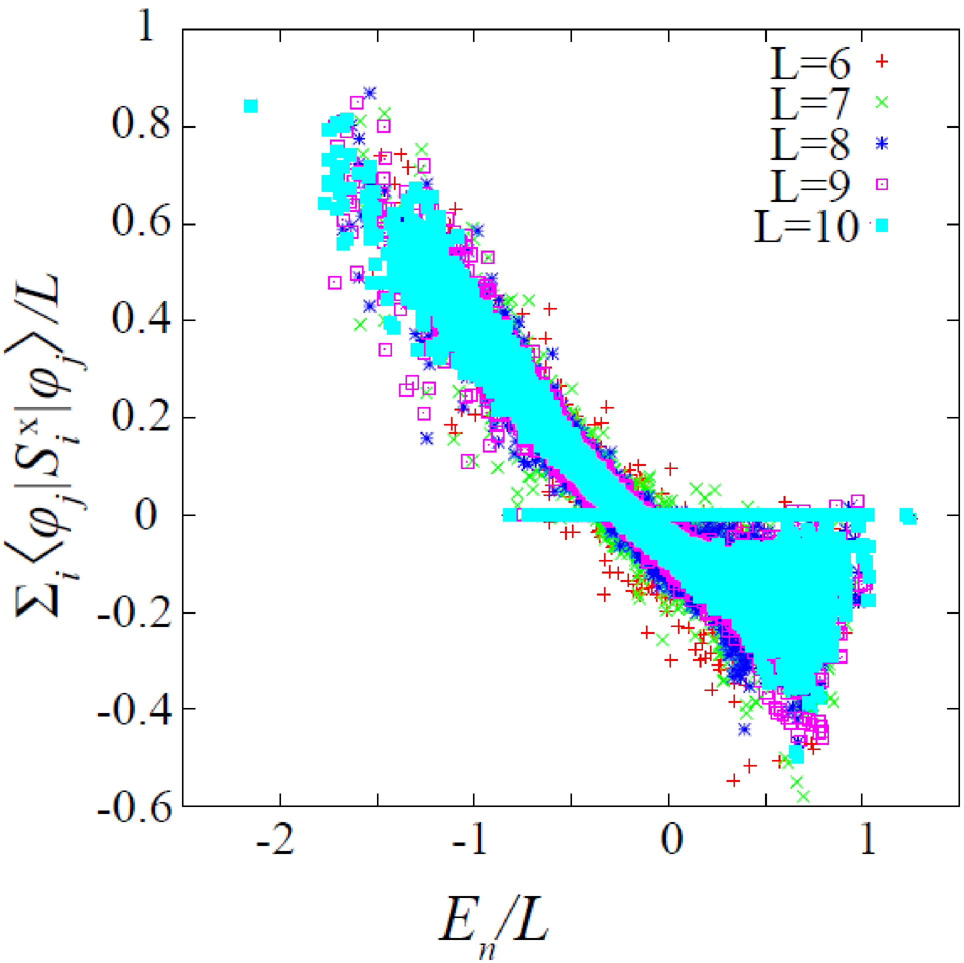
$\mathcal{T}$の状態は非熱的状態

（h_iと無関係なので）

→**ETHの反例！**

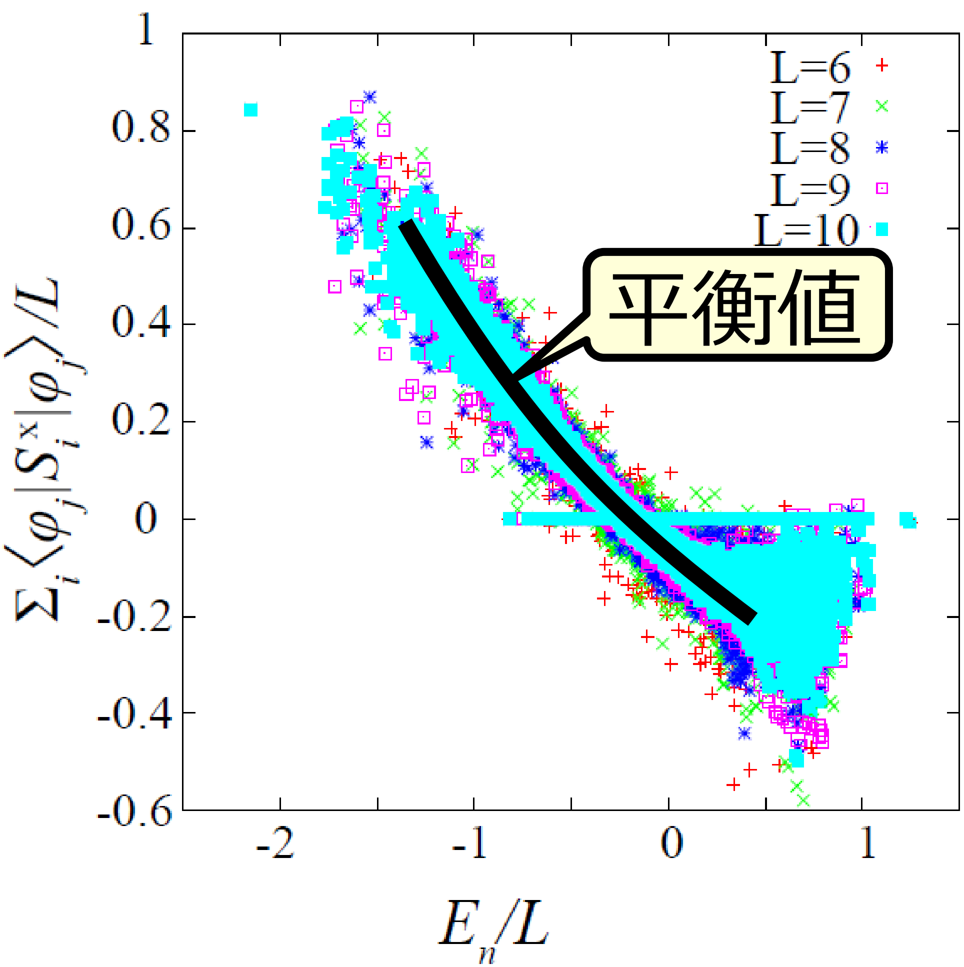
ETHの破れ（数値実験）

$\langle E_n|\hat{O}|E_n\rangle/L$ を E_n/L に対しプロット



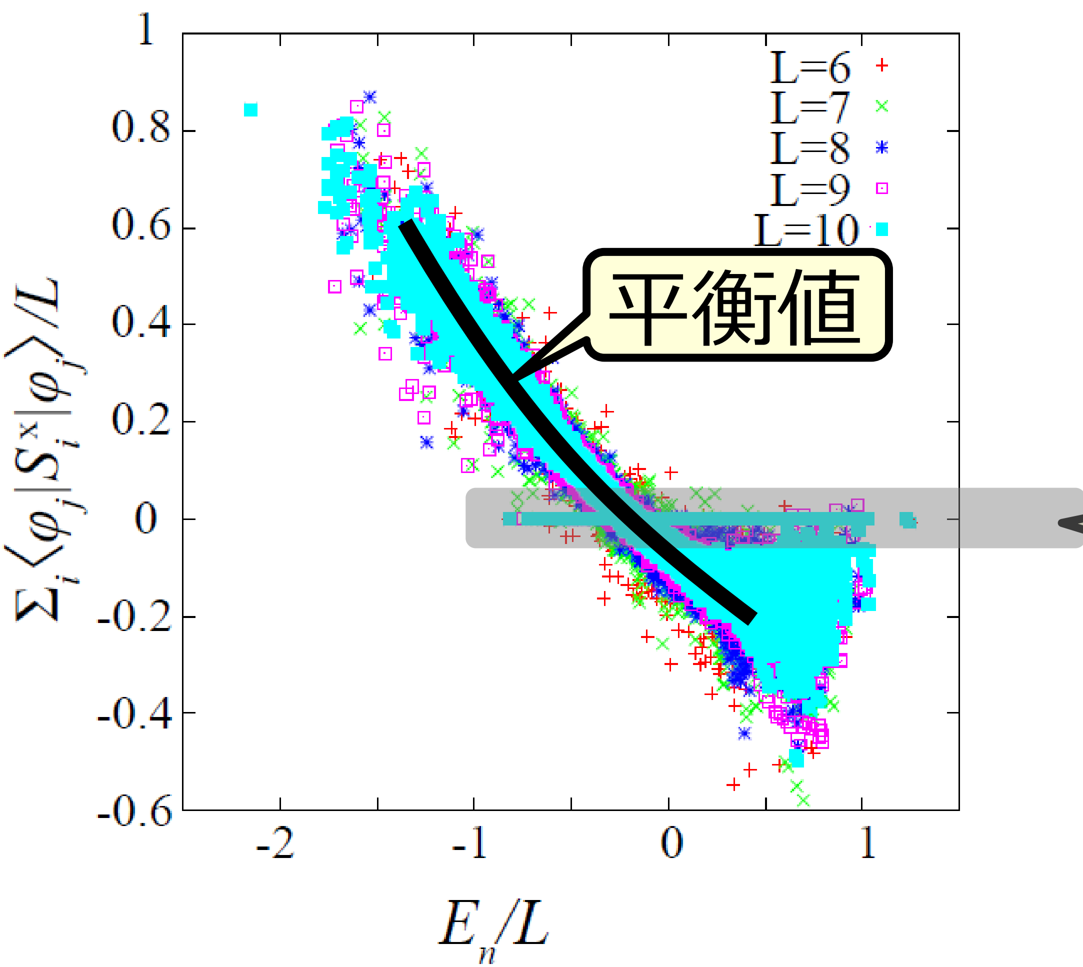
ETHの破れ（数値実験）

$\langle E_n | \hat{O} | E_n \rangle / L$ を E_n/L に対しプロット



ETHの破れ（数値実験）

$\langle E_n|\hat{O}|E_n\rangle/L$ を E_n/L に対しプロット



$\mathcal{T}$中の2^L個の固有状態は非熱的！

一般化：埋め込みの方法

$\mathcal{T}$: 埋め込みたい状態

P_i: ローカルな射影演算子

$$|\psi\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow P_i|\psi\rangle = 0$$

一般化：埋め込みの方法

$\mathcal{T}$: 埋め込みたい状態

P_i: ローカルな射影演算子

$$|\psi\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow P_i|\psi\rangle = 0$$

すると、任意のh_iに対し、

$$\boldsymbol{H = \sum_i P_i h_i P_i + H'}$$

は$\mathcal{T}$を**有限温度のエネルギー固有状態**に持つ！

(H': 任意のiで$[H', P_i] = 0$を満たすもの)

一般化：埋め込みの方法

$\mathcal{T}$: 埋め込みたい状態
P_i: ローカルな射影演算子

$$|\psi\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow P_i|\psi\rangle = 0$$

すると、任意のh_iに対し、

$$\boldsymbol{H = \sum_i P_i h_i P_i + H'}$$

は$\mathcal{T}$を**有限温度のエネルギー固有状態**に持つ！
(H': 任意のiで$[H', P_i] = 0$を満たすもの)

任意の**MPS, テンソルネットワーク**は埋め込める!
(ex: AKLT, ダイマー状態, 猫状態…)

アウトライン

研究背景：孤立量子系の熱化の問題とETH

ETHを破る非可積分系の構成

ETHを破る非可積分系の熱化

熱平衡化の新しいシナリオに向けて

どのような初期状態は熱化するか？

全スピンが±1の状態は熱化しない。
ではー か所だけスピン0があったら？

どのような初期状態は熱化するか？

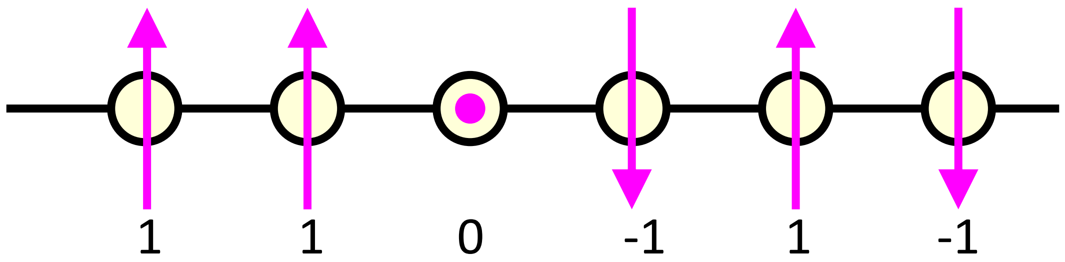
全スピンが± 1の状態は熱化しない。
では一か所だけスピン0があったら？

スピン0が一つでもあれば熱化する！

どのような初期状態は熱化するか？

全スピンが±1の状態は熱化しない。
ではー か所だけスピン0があったら？

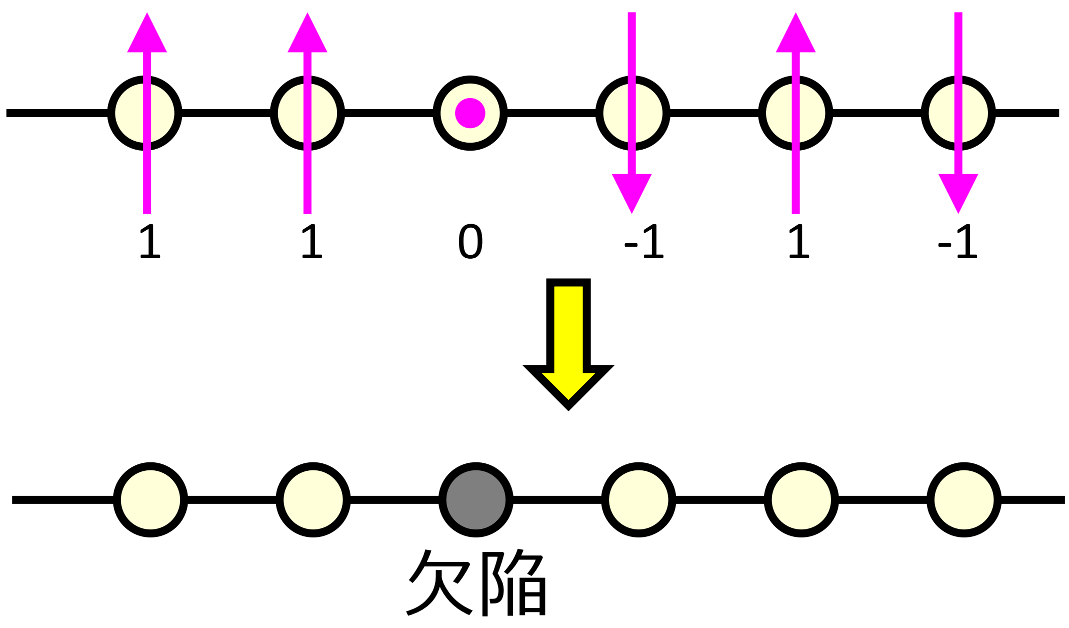
スピン0が一つでもあれば熱化する！



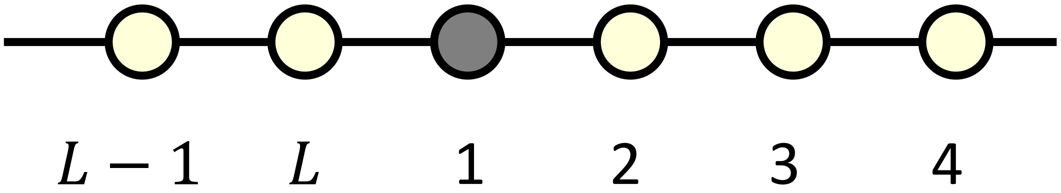
どのような初期状態は熱化するか？

全スピンが±1の状態は熱化しない。
では一か所だけスピン0があったら？

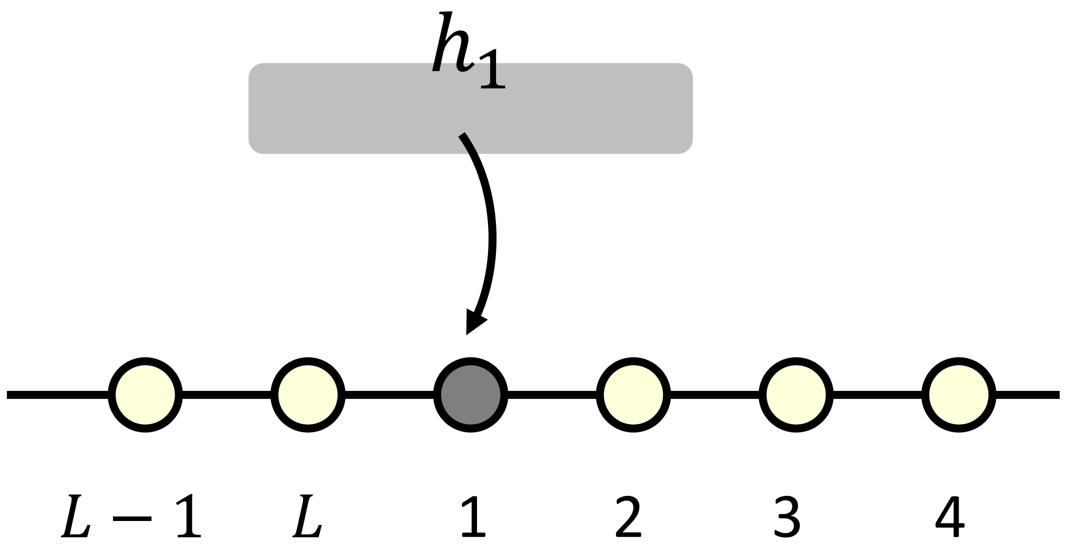
スピン0が一つでもあれば熱化する！



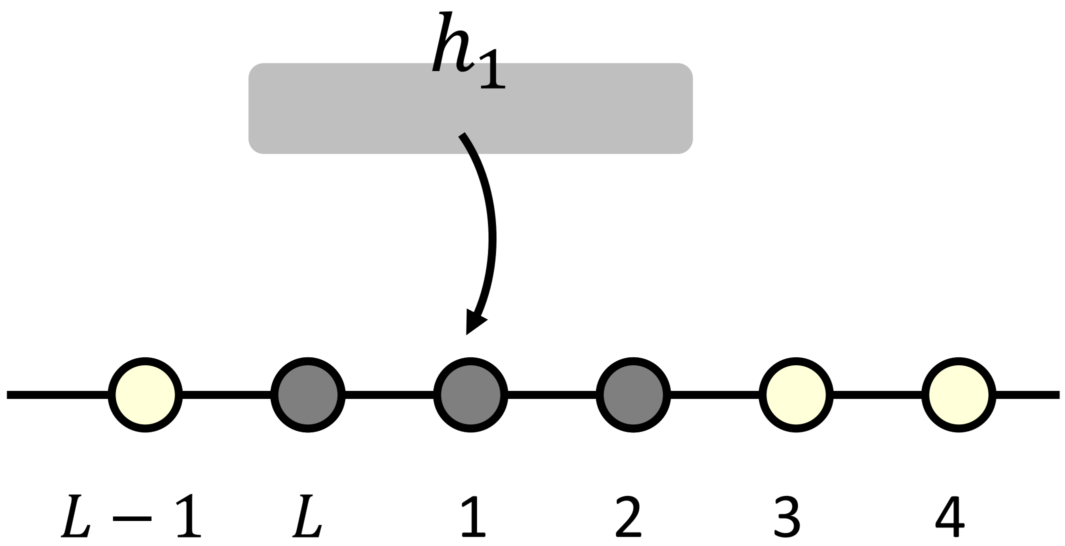
熱化：欠陥の拡散



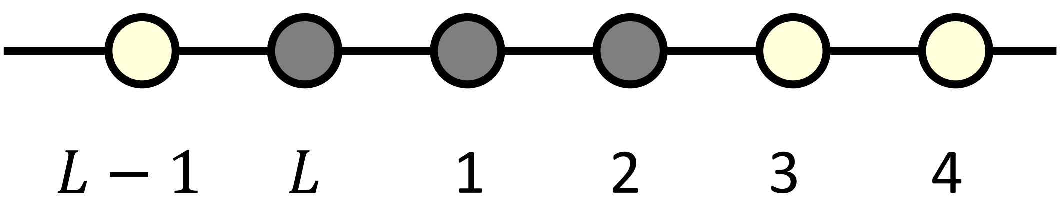
熱化：欠陥の拡散



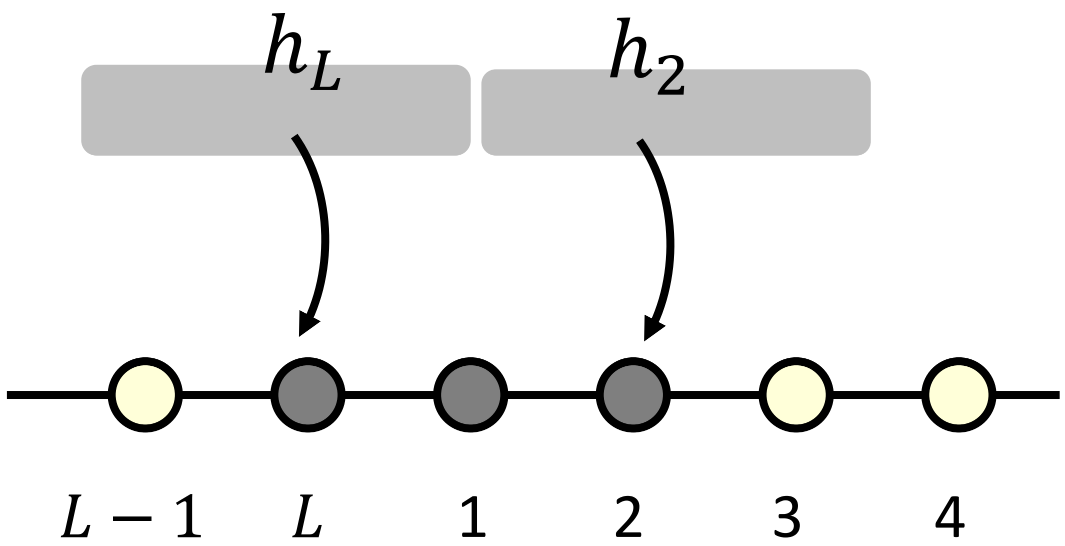
熱化：欠陥の拡散



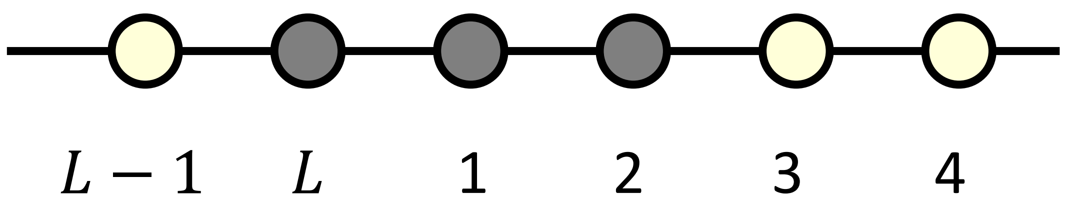
熱化：欠陥の拡散



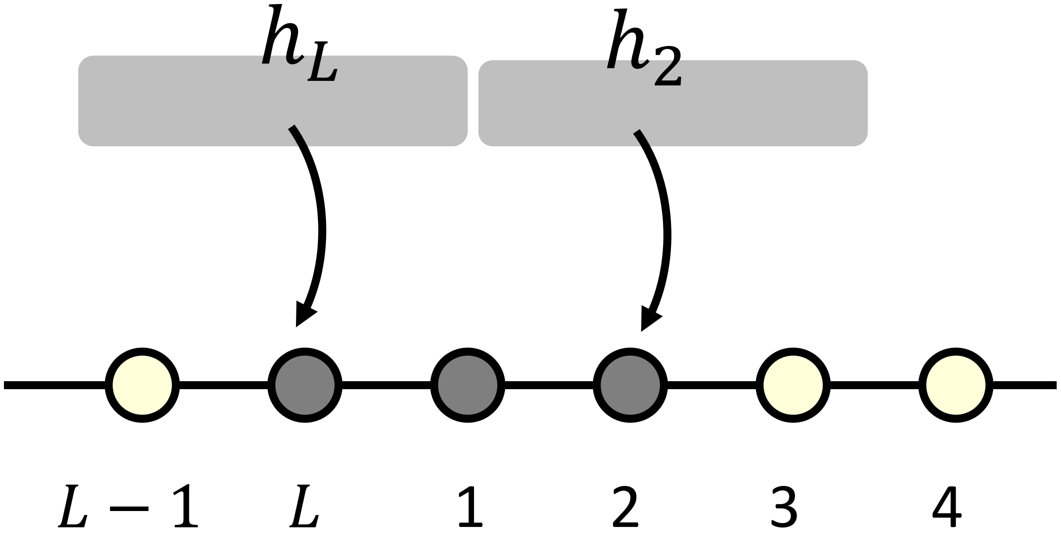
熱化：欠陥の拡散



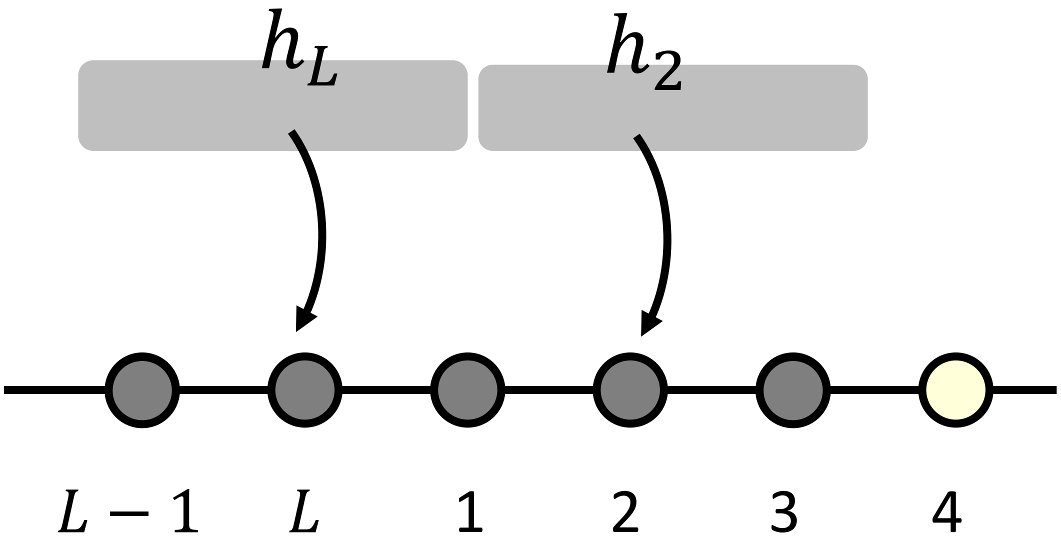
熱化：欠陥の拡散



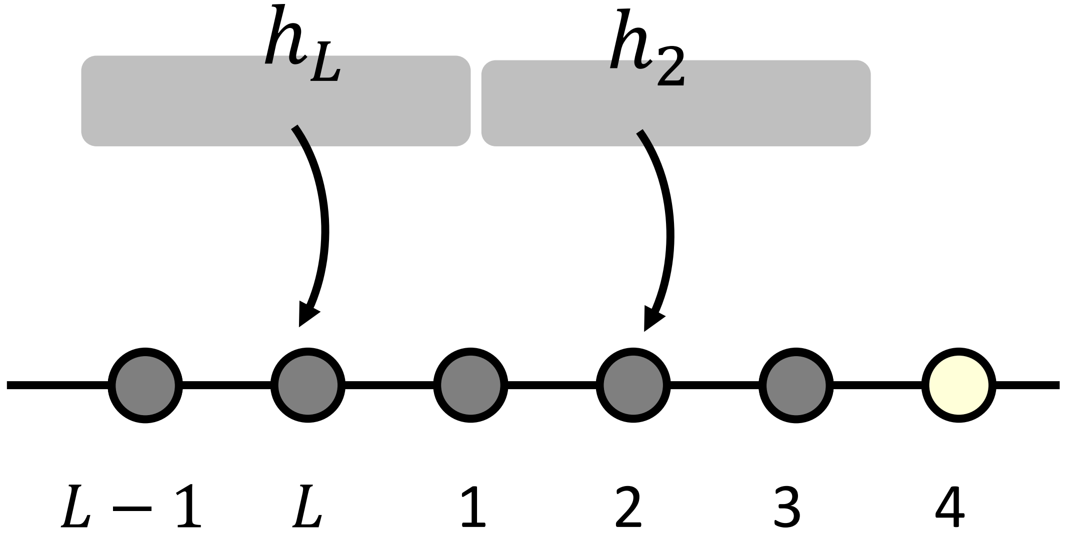
熱化：欠陥の拡散



熱化：欠陥の拡散



熱化：欠陥の拡散



欠陥は系全体に広がれる！

マクロ系におけるクエンチ

欠陥を一つも含まない状態は用意可能か？

マクロ系におけるクエンチ

欠陥を一つも含まない状態は用意可能か？

<u>基底状態からのクエンチ </u>(絶対零度) → **Yes!**

マクロ系におけるクエンチ

欠陥を一つも含まない状態は用意可能か？

基底状態からのクエンチ (絶対零度) → **Yes!**

有限温度でのクエンチ → **No!**
(熱ゆらぎが必ず欠陥を生み出すので)

マクロ系におけるクエンチ

欠陥を一つも含まない状態は用意可能か？

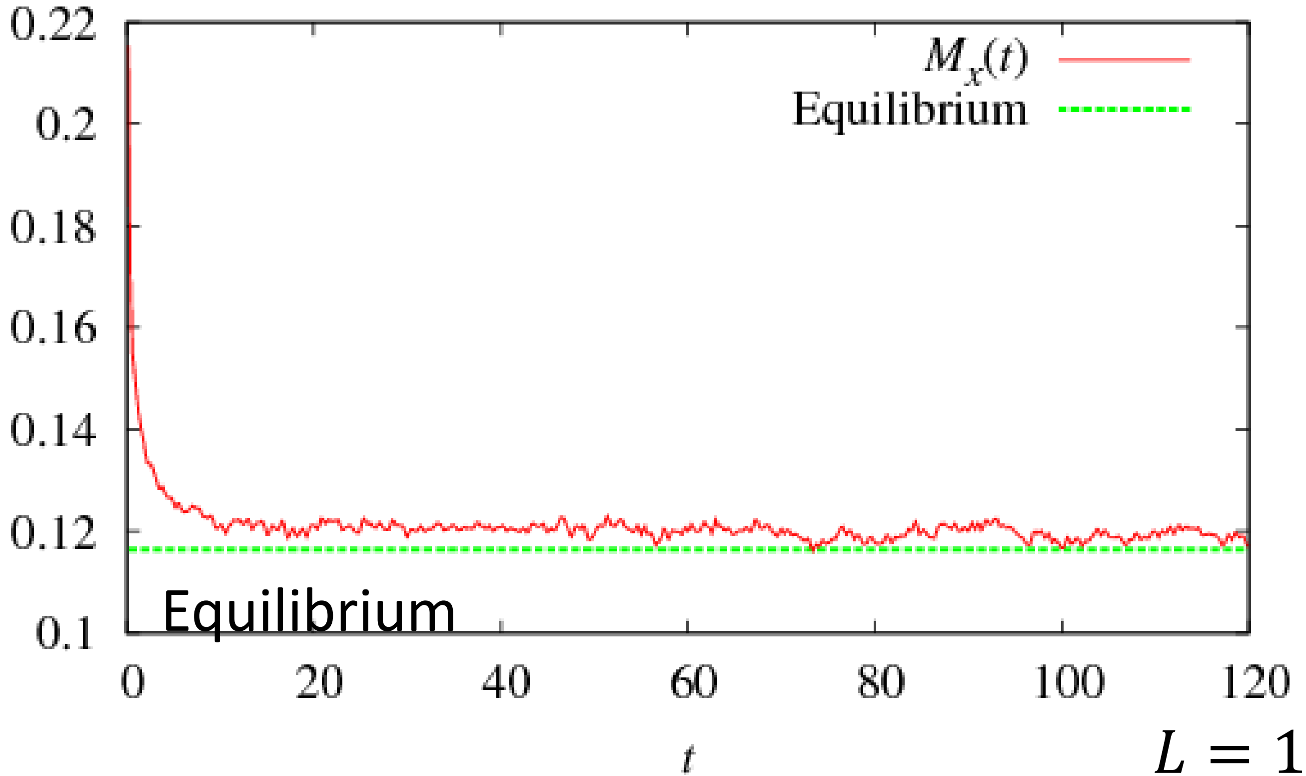
基底状態からのクエンチ (絶対零度) → **Yes!**

有限温度でのクエンチ → **No!**
(熱ゆらぎが必ず欠陥を生み出すので)

絶対零度は現実世界には存在しない
→**物理的な初期状態は欠陥を含む！**

ETHによらない熱化

別のハミルトニアンの熱的状態からのクエンチ



$L = 12$

ETHが破れているにもかかわらず熱化する！

アウトライン

研究背景：孤立量子系の熱化の問題とETH

ETHを破る非可積分系の構成

ETHを破る非可積分系の熱化

熱平衡化の新しいシナリオに向けて

熱化のETHシナリオはどこがまずかったか？

熱化のETHシナリオ

- 一般的でない（反例がある）
- ETHを満たすことを証明できる具体例がない

ETHは**強すぎる仮定！**

熱化のETHシナリオはどこがまずかったか？

熱化のETHシナリオ

- 一般的でない（反例がある）
- ETHを満たすことを証明できる具体例がない

ETHは**強すぎる仮定！**

熱化の新しいシナリオが必要！

熱化のETHシナリオはどこがまずかったか？

熱化のETHシナリオ

- 一般的でない（反例がある）
- ETHを満たすことを証明できる具体例がない

ETHは**強すぎる仮定！**

熱化の新しいシナリオが必要！

そもそも我々のモデルがなぜ熱化したのか
考え直してみよう

どういう初期状態は熱化するか

$$|\psi(0)\rangle = \sum_i c_i |E_i\rangle$$

どういう初期状態は熱化するか

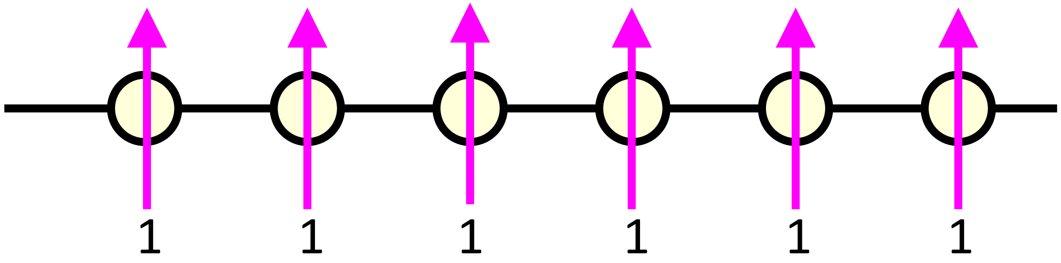
$$|\psi(0)\rangle = \sum_i \underline{c_i|E_i\rangle}$$

- 大半の重みが熱的な固有状態
  →**熱化する**

- 大半の重みが非熱的な固有状態
  →**熱化しない**

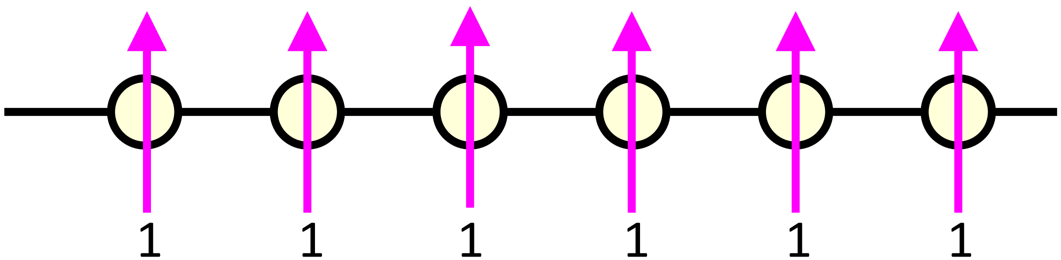
熱化しない状態を初期状態に用意できるか？

欲しい状態
(熱化しない)

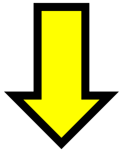


熱化しない状態を初期状態に用意できるか？

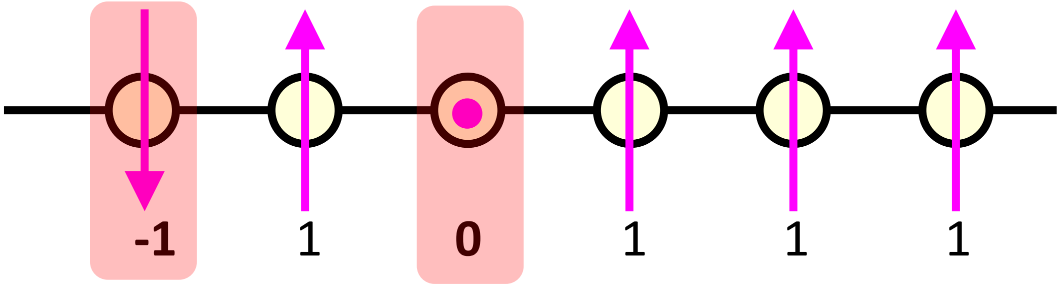
欲しい状態
(熱化しない)



熱的ノイズ
(local spin flip)



実現する状態



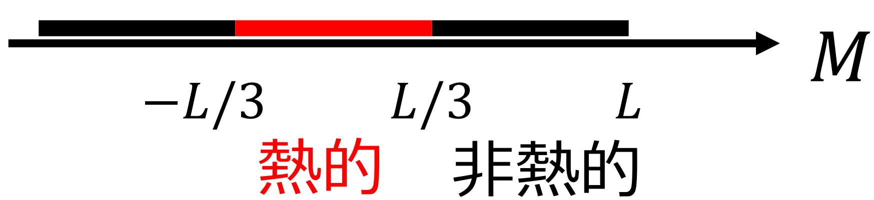
局所量で特徴づけられている場合（可積分系）

<u>例1</u>: 非熱的エネルギー固有状態が全磁化Mで特徴づけられている

(Mは**局所保存量**(局所物理量の和の形の保存量))

$|M| \leq L/3$: 熱的

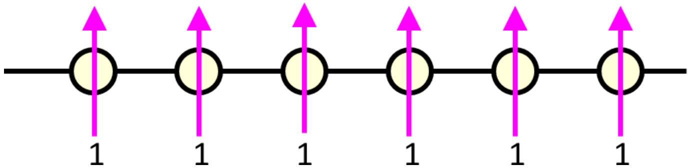
$|M| > L/3$: 非熱的



局所量で特徴づけられている場合（可積分系）

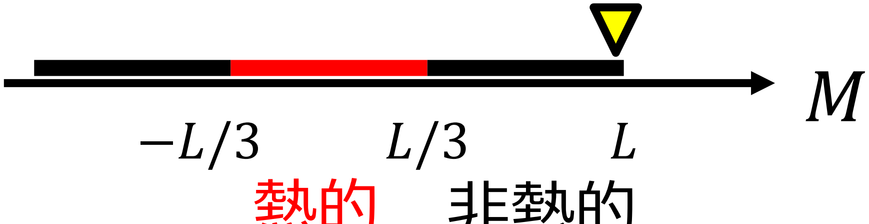
<u>例1</u>: 非熱的エネルギー固有状態が全磁化Mで特徴づけられている

(Mは**局所保存量**(局所物理量の和の形の保存量))



$|M| \leq L/3$: 熱的

$|M| > L/3$: 非熱的



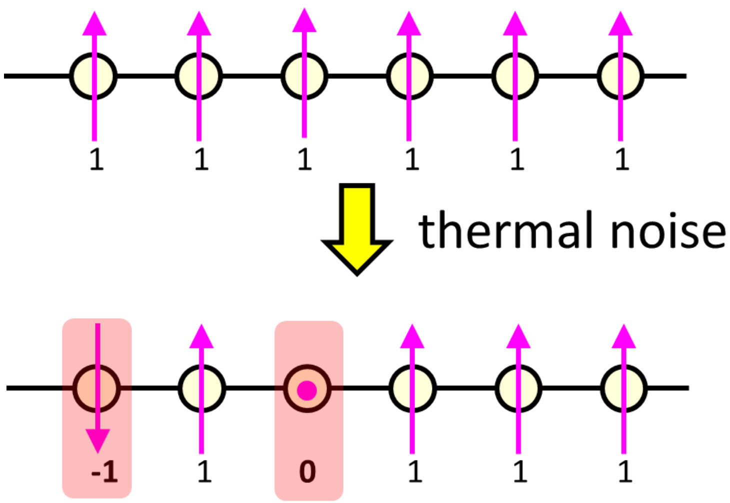
局所量で特徴づけられている場合（可積分系）

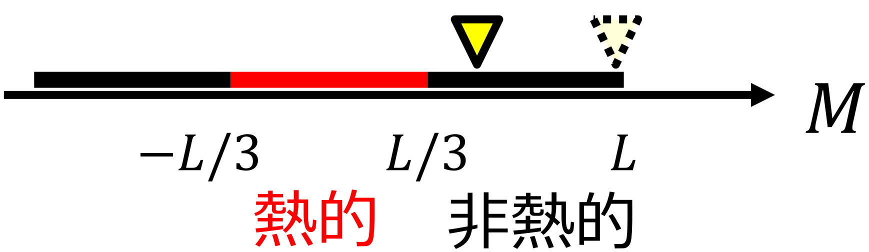
例1: 非熱的エネルギー固有状態が全磁化Mで特徴づけられている

(Mは**局所保存量**(局所物理量の和の形の保存量))

$|M| \leq L/3$: 熱的

$|M| > L/3$: 非熱的

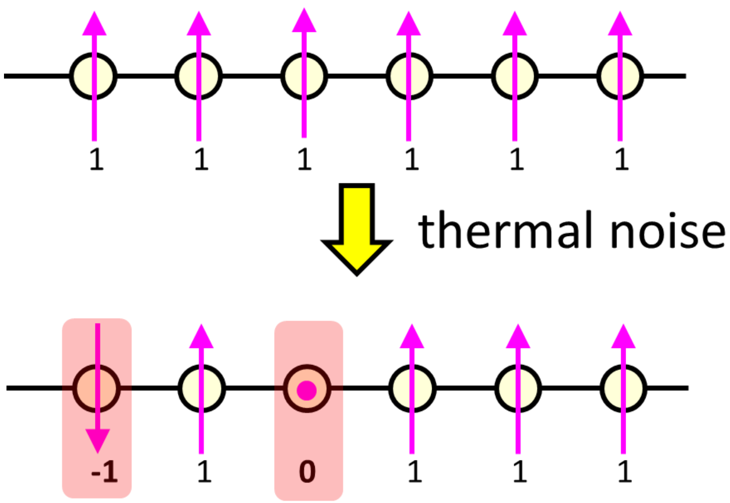




局所量で特徴づけられている場合（可積分系）

例1: 非熱的エネルギー固有状態が全磁化Mで特徴づけられている
(Mは**局所保存量**(局所物理量の和の形の保存量))

$|M| \leq L/3$: 熱的
$|M| > L/3$: 非熱的

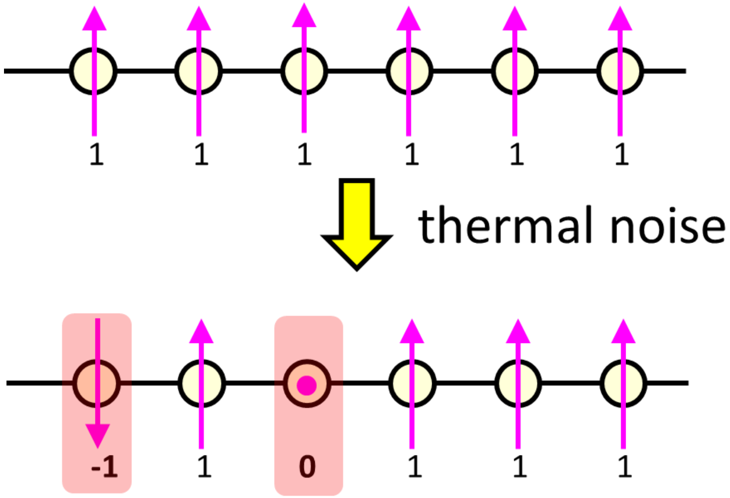


ノイズの下で用意された状態も熱化しない状態（非熱的固有状態で張られる空間内に留まる）

非局所量で特徴づけられている場合（我々のモデル）

例2: 我々のモデル（埋め込みの系）
($I = \prod (S_i^z)^2$ は**非局所保存量**)

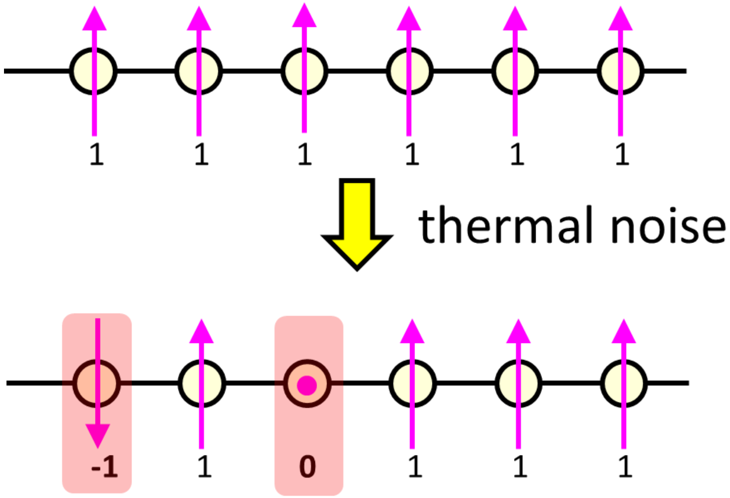
全スピン±1 ($I = 1$): 非熱的
それ以外 ($I = 0$): 熱的



非局所量で特徴づけられている場合（我々のモデル）

例2: 我々のモデル（埋め込みの系）
($I = \prod (S_i^z)^2$ は**非局所保存量**)

全スピン±1 ($I = 1$): 非熱的
それ以外 ($I = 0$): 熱的



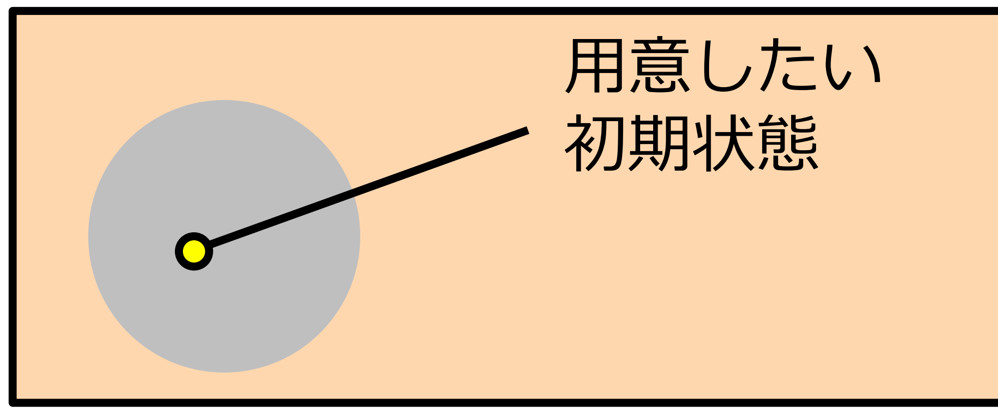
ノイズの下で用意された状態は熱化する！（非熱的固有状態で張られた空間の外に出る）

局所保存量の有無はいかなる差異をもたらすか

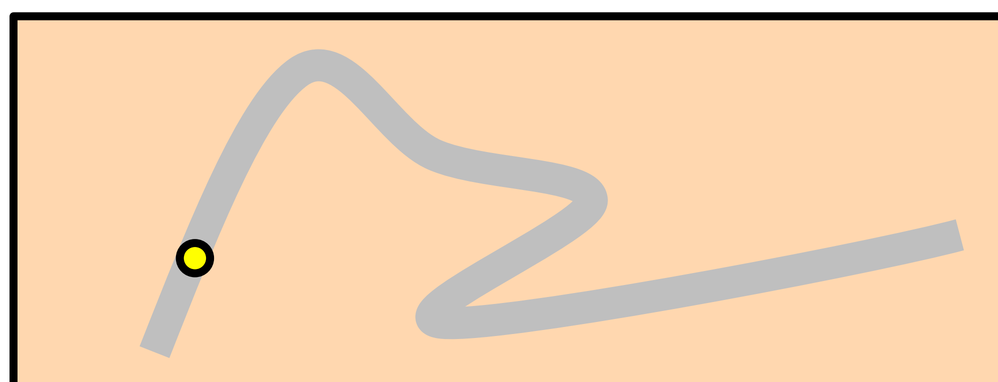
熱的エネルギー固有状態で張られた空間

非熱的エネルギー固有状態で張られた空間

局所保存量あり
(例: 可積分系)



局所保存量なし
(例: 我々のモデル)

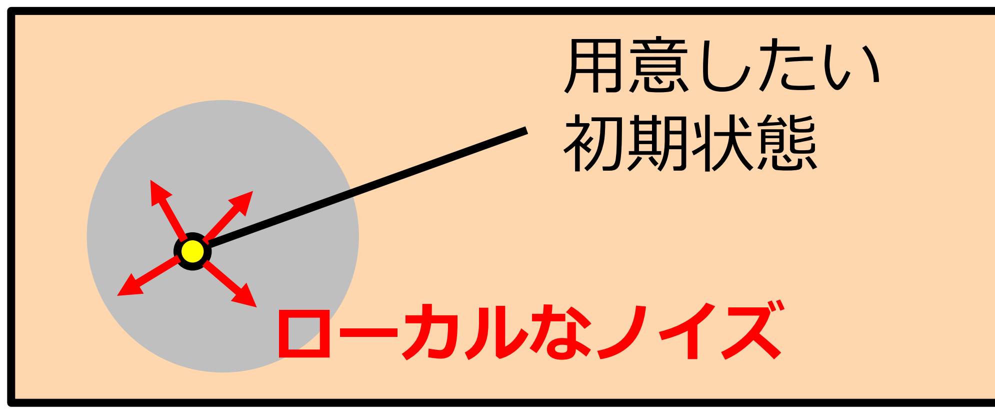


局所保存量の有無はいかなる差異をもたらすか

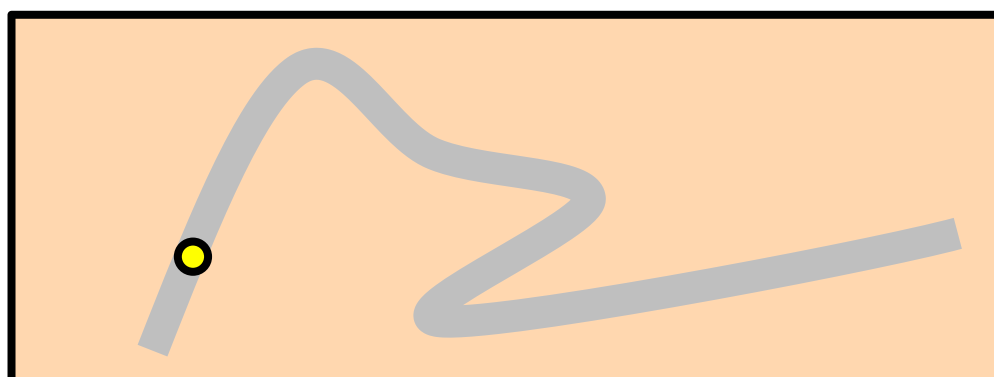
熱的エネルギー固有状態で張られた空間

非熱的エネルギー固有状態で張られた空間

局所保存量あり
(例: 可積分系)



局所保存量なし
(例: 我々のモデル)

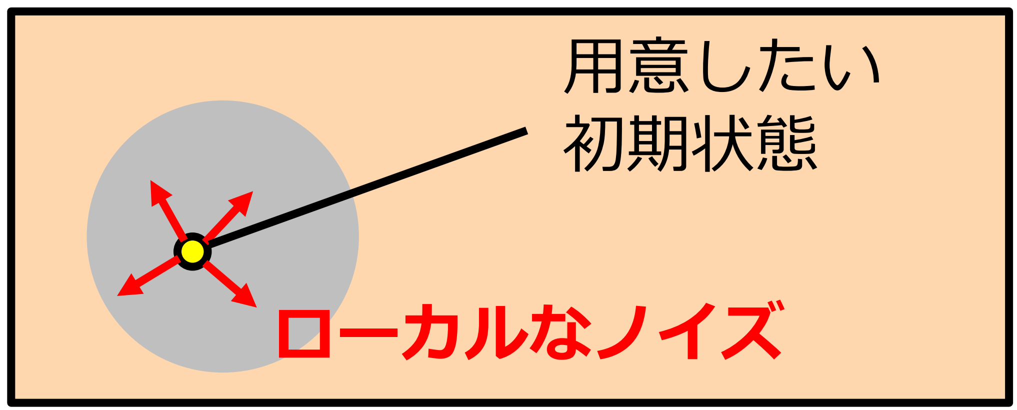


局所保存量の有無はいかなる差異をもたらすか

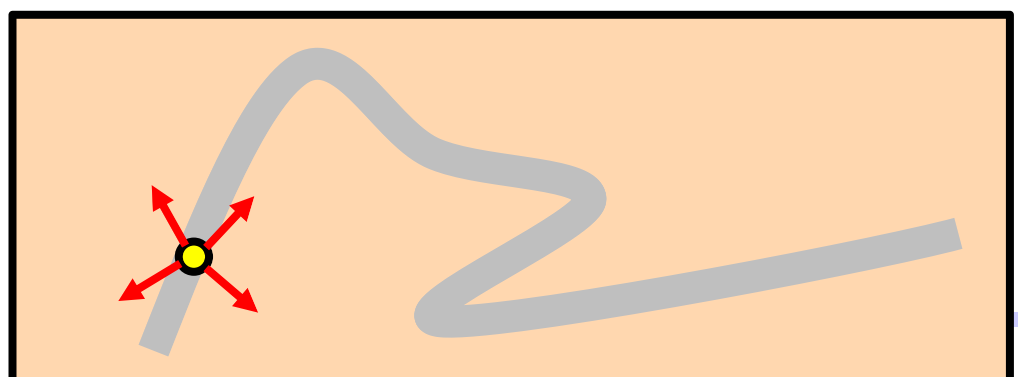
熱的エネルギー固有状態で張られた空間

非熱的エネルギー固有状態で張られた空間

局所保存量あり
(例: 可積分系)



局所保存量なし
(例: 我々のモデル)



予想（局所ノイズへの安定性と局所保存量）

予想

非熱的固有状態で張られる空間が**局所的なノイズ**（スピンフリップ）に対し安定

→その固有状態を持つハミルトニアンは必ず**局所保存量**を持つ。

量子エラー訂正の知見が使えそう！？
是非議論してください！

熱化の新たなシナリオ

もしこの予想が正しいなら

熱化する／しない = 局所保存量の不在／存在

と、きれいな構図で理解が出来る。

熱化の新たなシナリオ

もしこの予想が正しいなら

熱化する／しない = 局所保存量の不在／存在

と、きれいな構図で理解が出来る。

ところで、「局所保存量の不在」って具体的なモデルで証明できるの？

熱化の新たなシナリオ

もしこの予想が正しいなら

熱化する／しない = 局所保存量の不在／存在

と、きれいな構図で理解が出来る。

ところで、「局所保存量の不在」って具体的なモデルで証明できるの？

→ **Yes!**

スピン1/2 XYZ+磁場のモデルは局所保存量を持たない！

<u>定理 (局所保存量の不在)</u>

$$H=\sum_i J_x S_i^x S_{i+1}^x + J_y S_i^y S_{i+1}^y + J_z S_i^z S_{i+1}^z + h S_i^z$$

はサポート$L/2$以下の局所保存量を持たない

(N. Shiraishi, arXiv:1803.02637 (2018))

<u>他の例</u>

- 次近接相互作用するHeisenberg鎖

まとめ

- **非可積分、並進対称、非局在**の系で、ETHを満たさないものを具体的に構成した
- ETHなしでも熱化が生じることを確認した
- 局所保存量の有無は、熱化の有無に対する「実用的な判定条件」になるかもしれない

N. Shiraishi and T. Mori, Phys. Rev. Lett. 119, 030601 (2017)
T. Mori and N. Shiraishi, Phys. Rev. E 96, 022153 (2017)
N. Shiraishi, arXiv:1803.02637 (2018)

END