

孤立量子多体系における 熱平衡化と量子情報の非局所化

量子情報・物性の新潮流

2018/08/01@物性研究所

東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻

伊與田英輝

T. Yoshizawa, [E. Iyoda](#), and T. Sagawa, PRL **120**, 200604 (2018)

[E. Iyoda](#) and T. Sagawa, PRA **97**, 042330 (2018)

[E. Iyoda](#), H. Katsura, and T. Sagawa, arXiv:1806.10405

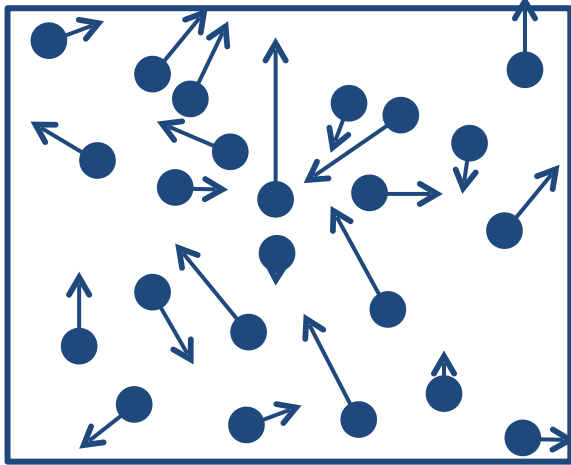
Outline

- **1. 熱平衡化と固有状態熱化仮説 (ETH)**
 - マクロな不可逆性の起源
 - 固有状態熱化仮説：大偏差解析による数値計算, 典型性
- **2. 量子情報の非局所化 (スクランブリング)**
 - 「カオスの上限」と非可積分性
 - 三体相互情報量, 初期状態依存性
 - XXX模型と Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型
 - clean SYK模型を含むSYK-like模型:Wishart SYK模型
 - 基底状態の縮退
- **Summary**

マクロな不可逆性の起源

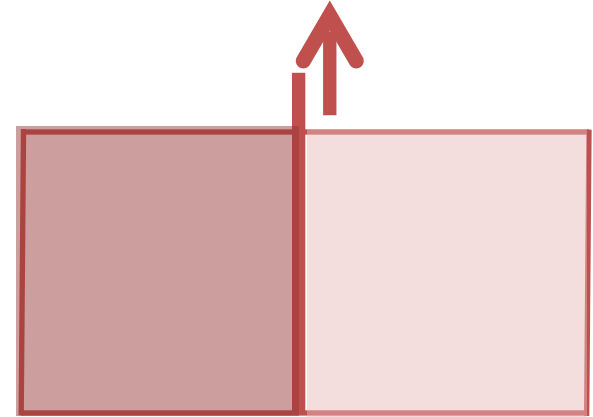
ミクロ(量子/古典力学)

可逆 (時間反転対称)



マクロ(熱力学)

不可逆 ($\Delta S \geq 0$)



「マクロな不可逆性がどのように創発するか？」

→ ボルツマン以来の根本的な問い



統計力学の舞台としての孤立量子多体系

孤立量子多体系の緩和

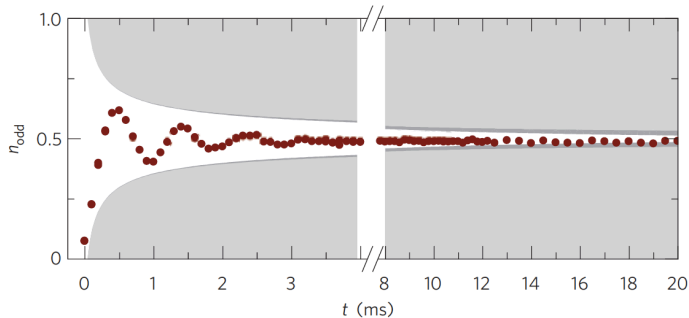
純粋状態の可逆(ユニタリ)時間発展でさえ
物理量の期待値は熱平衡化する

von Neumann, 1929 (arXiv:1003.2133)

実験的な検証

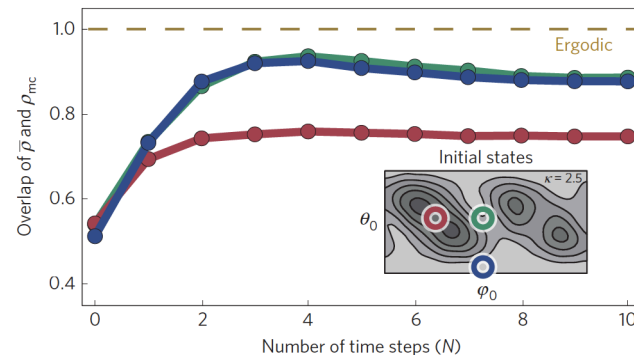
冷却原子系

S. Trotzky et al.,
Nature physics 8, 325 (2012)



超伝導量子ビット

C. Neill et al.,
Nature physics 12, 1037 (2016)



Q. 孤立量子多体系の熱平衡化のメカニズムは？

熱平衡化(熱化)の定義

定義：物理量の期待値の熱化

(緩和に加えて)期待値がミクロカノニカル平均と一致

$$\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{MC}$$

熱平衡化(熱化)の定義

定義：物理量の期待値の熱化

(緩和に加えて)期待値がミクロカノニカル平均と一致

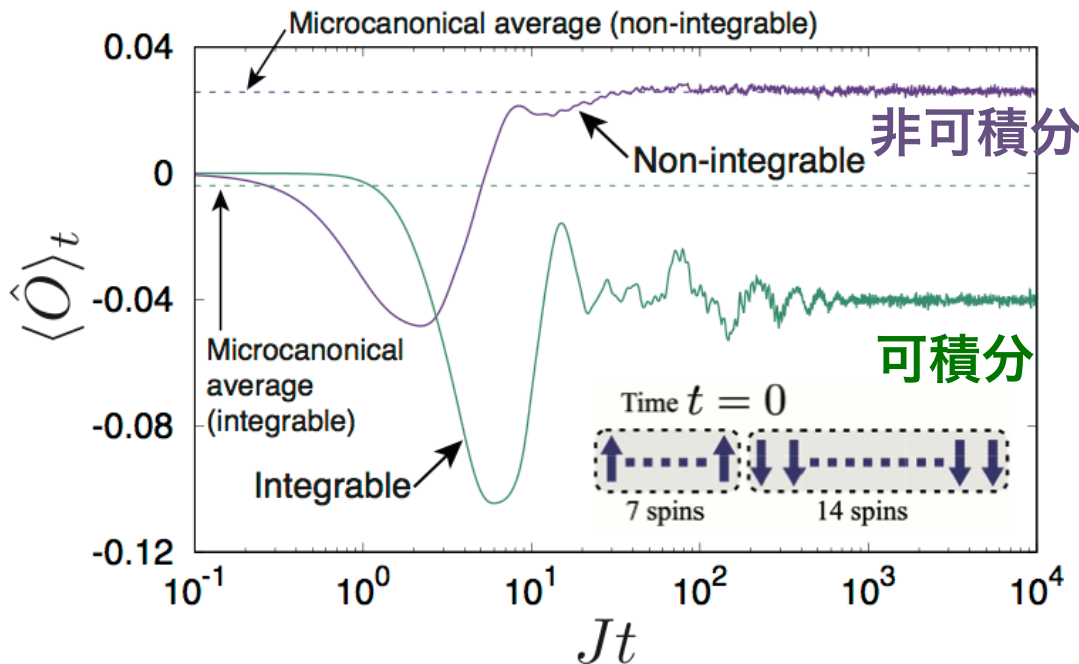
$$\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

◆◆◆解説◆◆◆

量子力学から熱力学第二法則へ

数値計算

金子和哉, 伊與田英輝, 沙川貴大, 日本物理学会誌 Vol.73, No. 6, p. 361 (2018)



1次元 XXZ 量子スピン鎖

次々近接相互作用

→ 可積分性を壊すパラメタ

$$\hat{O} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{S}_i^+ \hat{S}_{i+3}^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_{i+3}^+)$$

非可積分：熱化する

可積分：熱化しない

時間発展 と 物理量の長時間平均

セットアップ 純粋状態がシュレーディンガー方程式で時間発展

初期状態 $|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle$

$|E_j\rangle$: エネルギー固有状態
簡単のため, エネルギーに縮退なし

時間発展後 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t} |E_j\rangle$

期待値 $\langle \hat{O} \rangle_t := \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle$

時間発展 と 物理量の長時間平均

セットアップ 純粋状態がシュレーディンガー方程式で時間発展

初期状態 $|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle$ $|E_j\rangle$: エネルギー固有状態
簡単のため, エネルギーに縮退なし

時間発展後 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t} |E_j\rangle$

期待値 $\langle \hat{O} \rangle_t := \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle$

長時間平均とその周りの時間ゆらぎ

長時間平均 $\overline{\hat{O}} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \langle \hat{O} \rangle_t = \sum_j |c_j|^2 \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle$

時間ゆらぎ $(\Delta O)^2 := \overline{(\hat{O} - \overline{\hat{O}})^2}$

時間ゆらぎが小さいなら定常値に緩和し、その値は長時間平均

物理量の緩和の定理

長時間平均とその周りの時間ゆらぎ

定理

$$(\Delta O)^2 \leq \frac{\|\hat{O}\|^2}{D_{\text{eff}}}$$

Reimann, PRL (2008)

Short and Farrelly, NJP (2012)

縮退ありの場合に拡張可能

有効次元

$$D_{\text{eff}} := \frac{1}{\sum_j |c_j|^4}$$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle$$

初期状態の有効次元が大きければ、長時間平均へと緩和する

Q. 長時間平均はミクロカノニカル平均か？

固有状態熱化仮説 (ETH)

Eigenstate Thermalization Hypothesis

「全ての固有状態が熱的」

M. Rigol, V. Duniko, and M. Olshanii,
Nature **452**, 854 (2008)

$$O_j := \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

$|E_j\rangle$: エネルギーシェル内のエネルギー固有状態

1. ETHが成り立つなら熱化する

$$\overline{\hat{O}} = \sum_{j=1}^D |c_j|^2 \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}} \sum_{j \in \text{shell}} |c_j|^2 \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

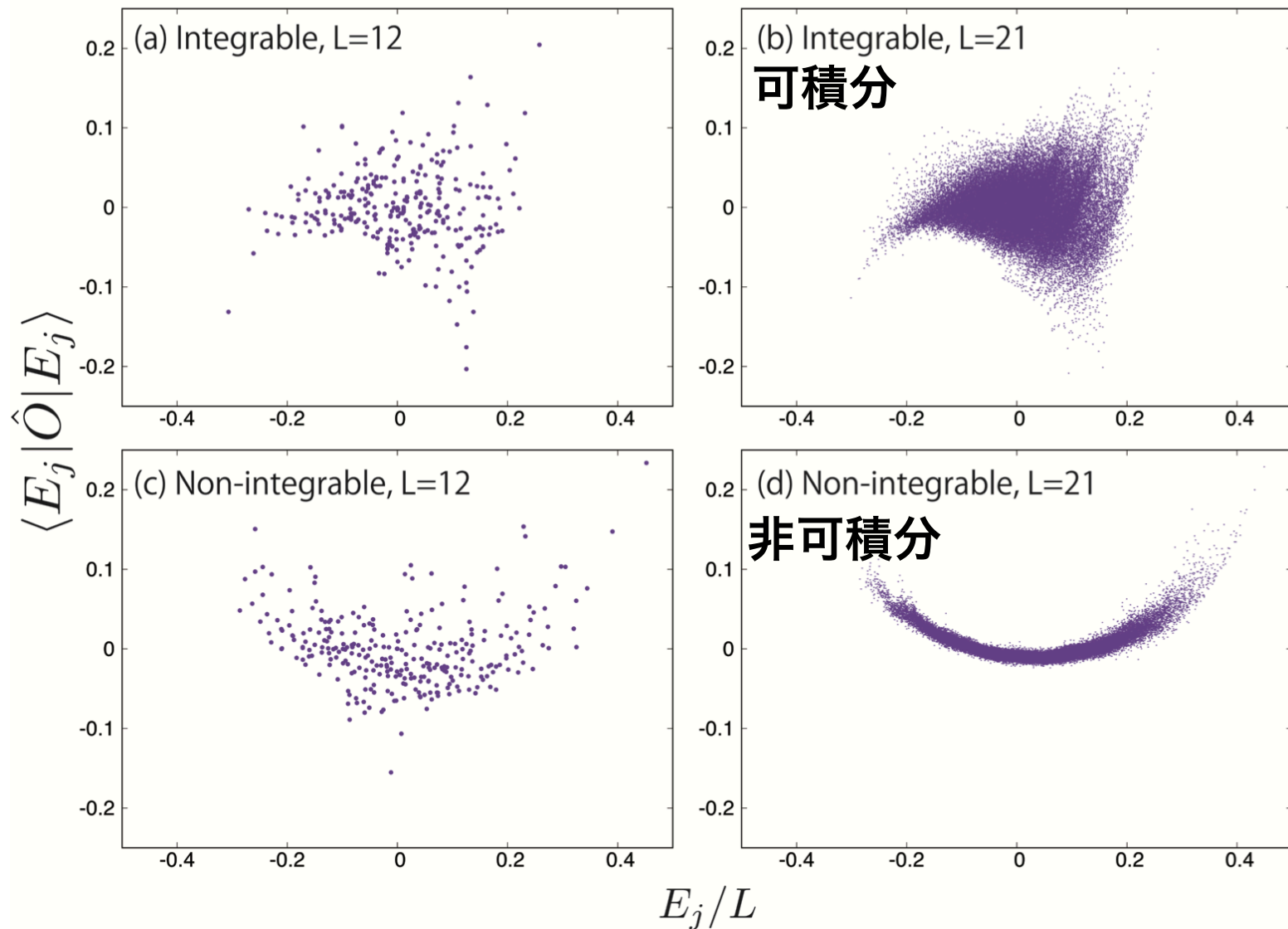
熱化の十分条件という意味で

ETHはエルゴード仮説の量子版とみなせる

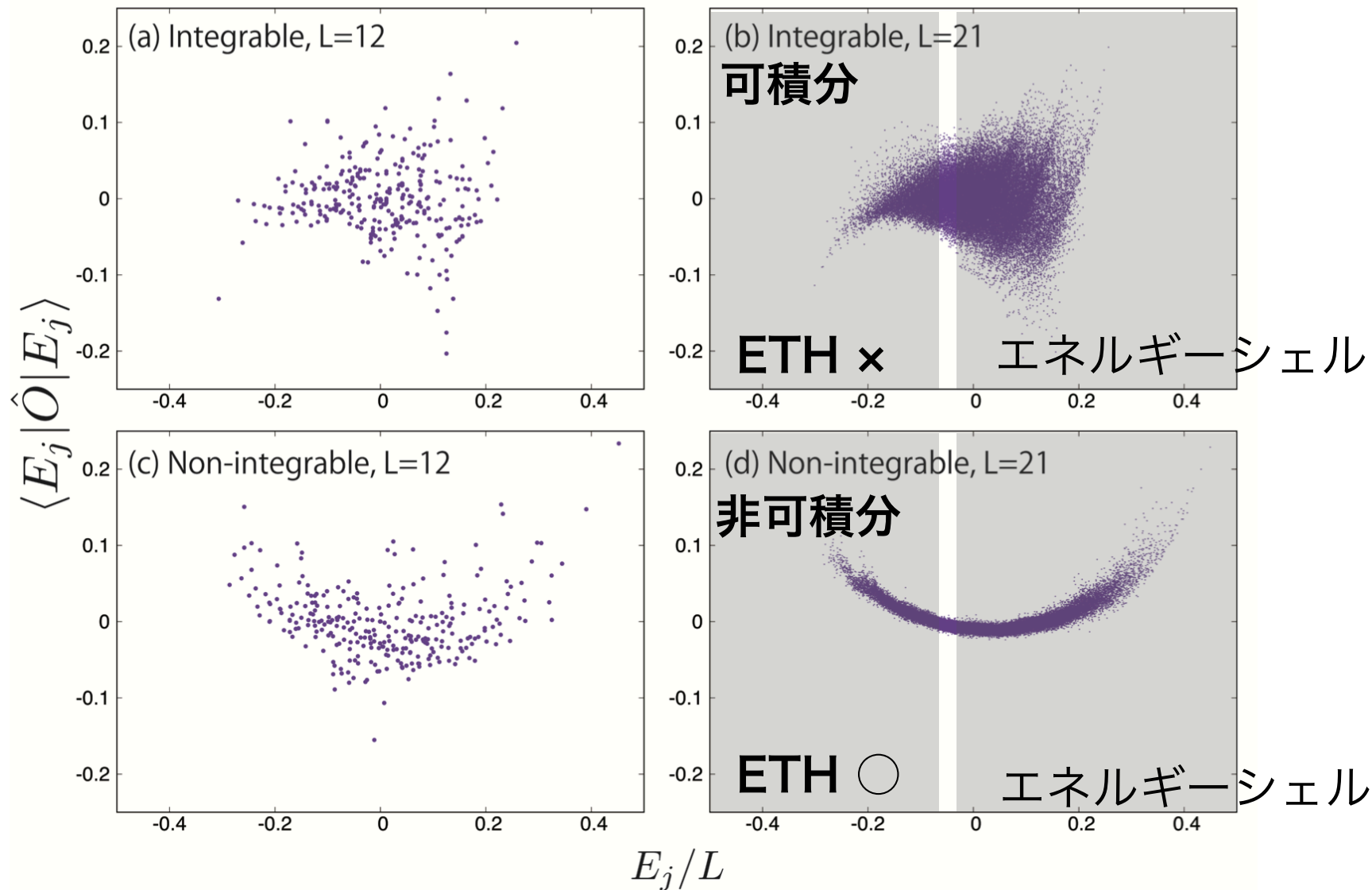
2. 非可積分系で成り立ち、

可積分系で成り立たないと考えられている。

固有状態熱化仮説 (ETH)



固有状態熱化仮説 (ETH)



強いETH vs 弱いETH

$$O_j := \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

エネルギー固有状態での期待値が
ミクロカノニカル平均と一致

強いETH

全ての j で成立

熱化の十分条件

(数値計算) 非可積分系 : ○

可積分系 : ×

M. Rigol, V. Duniko, and M. Olshanii,
Nature **452**, 854 (2008)

H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse,
PRE **90**, 052105 (2014)

弱いETH

ほとんど全ての j で成立

成り立たない j が少しあっても良い

定理により 非可積分系 : ○

可積分系 : ○

G. Biroli, C. Kollath, and A. Lauchli, PRL 105, 250401 (2010)
T. Mori, arXiv:1609.09776 (2016)

E. Iyoda, K. Kaneko, T. Sagawa, PRL 119, 100601 (2017)

可積分系は熱化しない → この違いが重要

強いETHが成立するかを系統的・直接的に検証したい

大偏差解析と非熱的固有状態

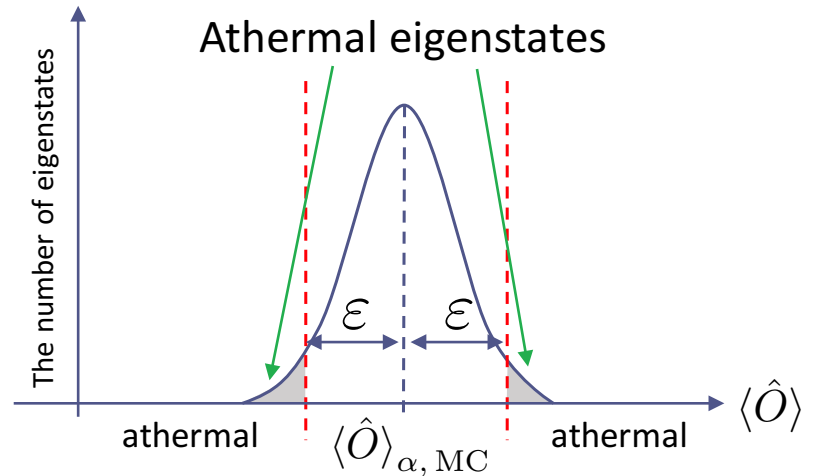
$$|O_j - \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}| < \varepsilon$$

$\Rightarrow j$: 熱的, thermal

$$|O_j - \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}| > \varepsilon$$

$\Rightarrow j$: 非熱的, athermal

非熱的狀態数 : D_{out}



大偏差解析と非熱的固有状態

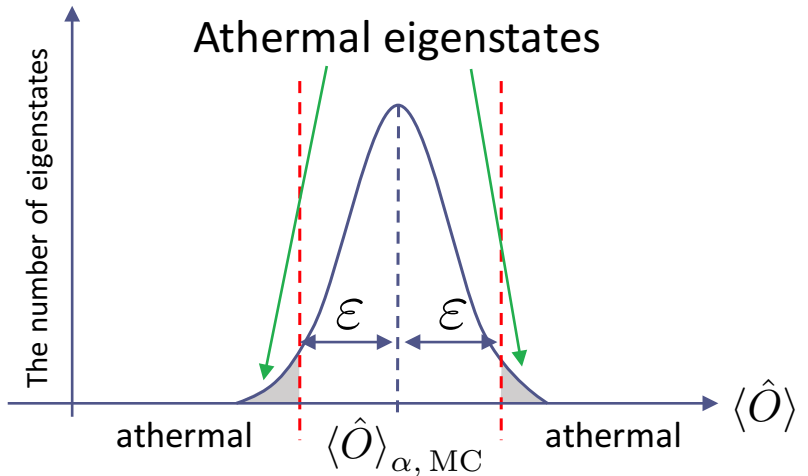
$$|O_j - \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}| < \varepsilon$$

$\Rightarrow j$: 熱的, thermal

$$|O_j - \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}| > \varepsilon$$

$\Rightarrow j$: 非熱的, athermal

非熱的状態数 : D_{out}



ETHの判定 $D \sim e^{\alpha' L}$: エネルギーシェル次元

定理 $D_{\text{out}}/D \leq \exp(-\gamma_\varepsilon L)$ $d = 1$ 有限温度, $d \geq 2$ 十分高温
 Y. Ogata, Comm. Math. Phys. **296**, 35 (2010)
 T. Mori, arXiv:1609.09776

1. $D_{\text{out}}/D \sim e^{-\alpha L}$

指数減衰 ($\alpha' > \alpha$) $\Rightarrow D_{\text{out}} \sim e^{(\alpha' - \alpha)L} > 0$ **強いETH成立せず**

2. $D_{\text{out}}/D \sim e^{-f(L)}$

$f(L)$: 下凸の増加関数 $\Rightarrow D_{\text{out}} = 0$ **強いETH成立**

コメント：強いETH vs 弱いETH

1. 弱いETHが不十分な理由

G. Biroli, C. Kollath, and A. Lauchli, PRL 105, 250401 (2010)

$$O_j := \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

可積分系では非熱的な状態に

指数関数的に大きな重みがかかることで

熱化が起こらない

$$\text{例：} \sum_{j:\text{athermal}} |c_j|^2 \simeq 1$$

2. 強いETH以外の熱化のメカニズム

N. Shiraishi and T. Mori, PRL 119, 030601 (2017)

並進対称で局所保存量がない場合に強いETHの反例を構成

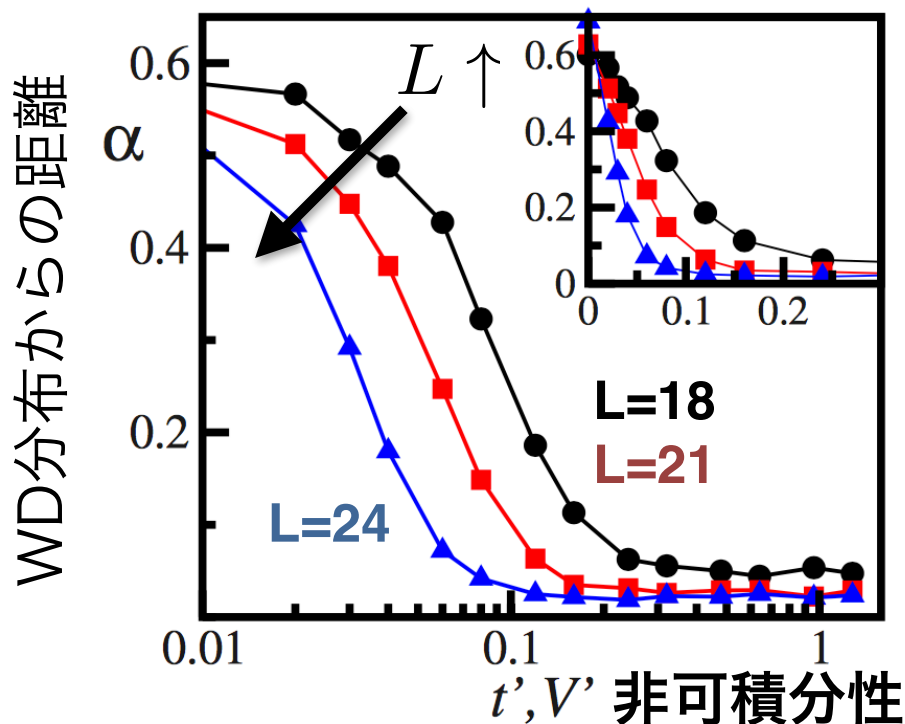
強いETHは満たさないが、熱化はする

量子カオスとエネルギー準位統計

ハミルトニアン of エネルギー準位統計

- Poisson分布 (可積分)
- Wigner-Dyson (WD) 分布 (非可積分) → 量子カオス

近可積分系でも熱力学極限で Wigner-Dyson 分布



L. Santos and M. Rigol,
PRE 81, 036206 (2010)

$$\alpha \equiv \frac{\sum_i |P(s_i) - P_{WD}(s_i)|}{\sum_i P_{WD}(s_i)}$$

目的

熱化のメカニズムの有力な仮説の一つ：強いETH

量子カオスにおける準位統計の結果から
近可積分系は熱化すると期待されている

L. Santos and M. Rigol,
PRE 81, 036206 (2010)

一方、近可積分系は有限サイズ効果が大きいいため
数値検証が難しい

大偏差解析により強いETHを直接的に数値検証

熱力学に従わない可積分系は摂動に対して安定なのか？

モデルと計算手法 1.可積分

モデル：1d spin-1/2 XX模型

$$\hat{\mathcal{H}}_{XX} := - \sum_{i=1}^L \left[\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + h.c. \right]$$

周期境界条件
サイト数 L

ハードコアボソン

$$[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad \{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i\} = 1, \{\hat{b}_i, \hat{b}_i\} = \{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i^\dagger\} = 0$$

手法

Jordan-Wigner 変換でfermionに変換

$$\hat{b}_i = \exp \left(i\pi \sum_{j=1}^{i-1} \hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j \right) \hat{f}_i \quad \hat{b}_i^\dagger = \hat{f}_i^\dagger \exp \left(i\pi \sum_{j=1}^{i-1} \hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j \right)$$

Slater行列式の利用

M. Rigol A. Muramatsu, PRL **93**, 230404 (2004)
M. Rigol, PRA **72**, 063607 (2005)

モデルと計算手法 2.非可積分性を変調

モデル：1d spin-1/2 XXX模型 + 次近接相互作用

$$\hat{\mathcal{H}}_{XXX} := \frac{1}{1 + \lambda} \left[\hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda \hat{W} \right]$$

近接 次近接

周期境界条件
サイト数 L

$\lambda = 0$: 可積分 $\lambda > 0$: 非可積分

手法：厳密対角化, 櫻井杉浦法

並進対称性を利用

$L = 12 \sim 21, 24(\lambda = 1)$ 厳密対角化法

$L = 24(\lambda \neq 1)$ 櫻井杉浦(SS)法, スパコン(ISSP)

T. Sakurai and H. Sugiura, J. Comput. Appl. Math. **159**, 119 (2003)

SS法: 留数積分を利用して経路内の射影ベクトルを取得

Krylov部分空間法の一つ

非熱的な状態の定義と物理量

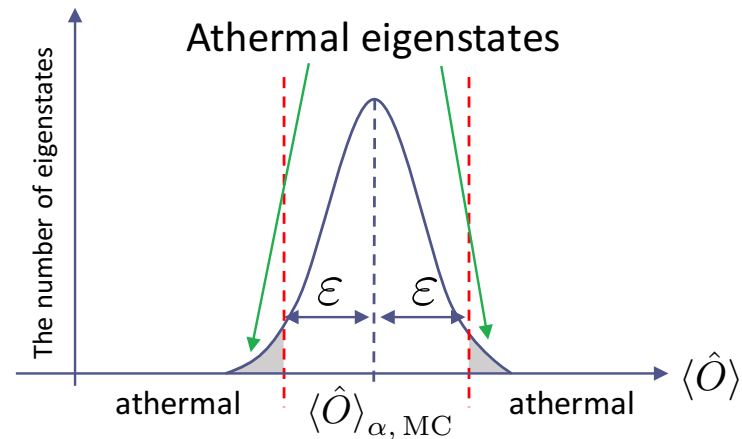
$$D_{\text{out}} := \sum_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{M}(E, \Delta E)} \theta \left(\left| \langle \hat{O} \rangle_\alpha - \langle \hat{O} \rangle_{\alpha, \text{MC}} \right| - \varepsilon \right)$$

$\theta(\cdot)$: ステップ関数

$$\mathcal{M}(E, \Delta E) := \{|E_\alpha\rangle \mid E - \Delta E < E_\alpha < E\}$$

: エネルギーシェル

$$\langle \hat{O} \rangle_{\alpha, \text{MC}} := \frac{1}{|\mathcal{M}(E_\alpha, \delta)|} \sum_{|E_\beta\rangle \in \mathcal{M}(E_\alpha, \delta)} \langle \hat{O} \rangle_\beta$$



物理量 (ハードコアボソンによる表示)

粒子数相関

$$\hat{n}_1 \hat{n}_2 = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$$

3次近接ホッピング

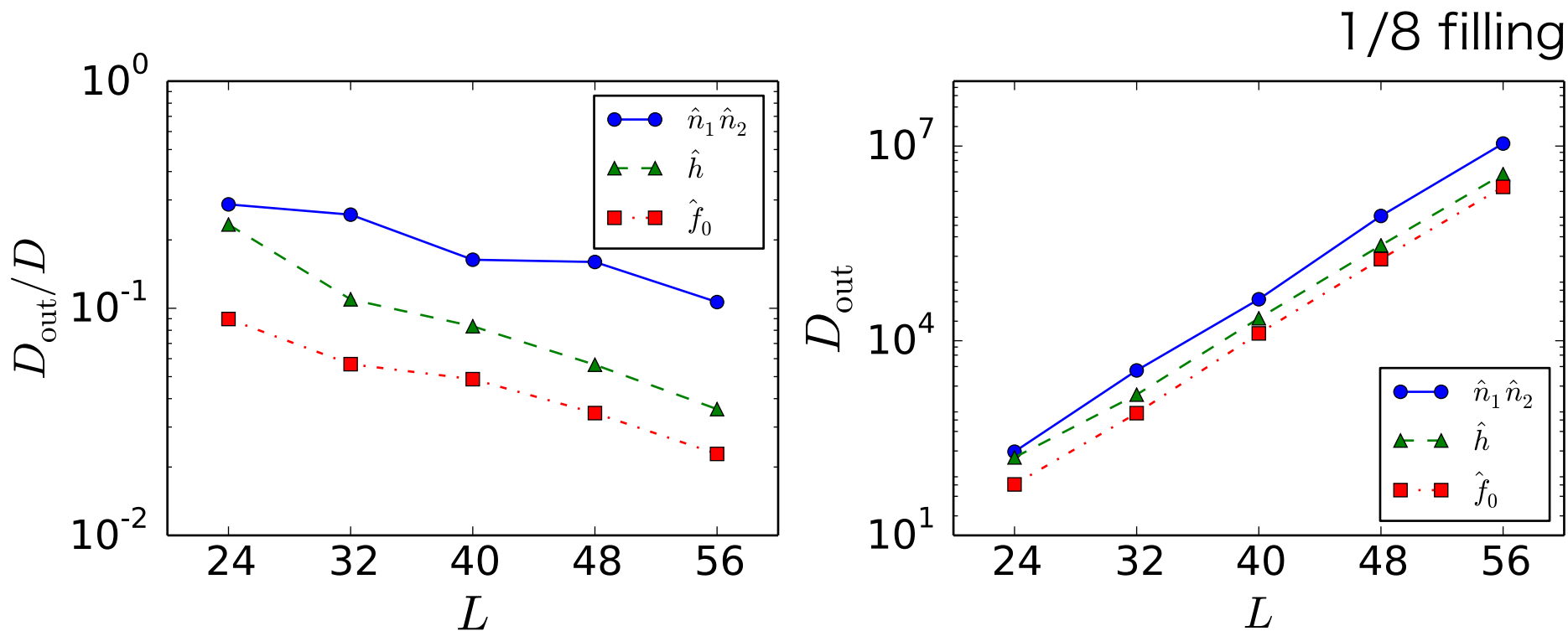
$$\hat{h} = \frac{1}{L} \sum_i \left[\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+3} + h.c. \right]$$

運動量分布 ($k=0$)

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{L} \sum_{ij} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

結果：可積分系 (XX模型)

$$D_{\text{out}} := \sum_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{M}(E, \Delta E)} \theta \left(\left| \langle \hat{O} \rangle_\alpha - \langle \hat{O} \rangle_{\alpha, \text{MC}} \right| - \varepsilon \right) \quad \text{非熱的固有状態の数}$$



非熱的固有状態の数が指数関数的に増加

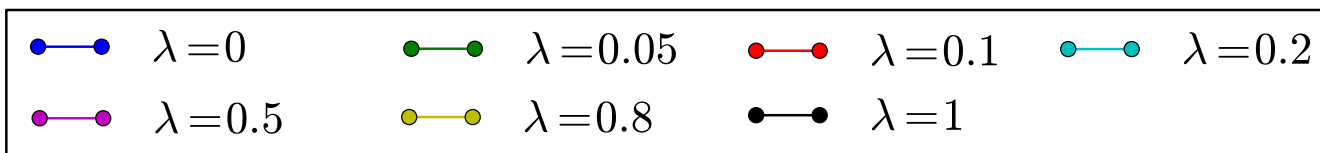
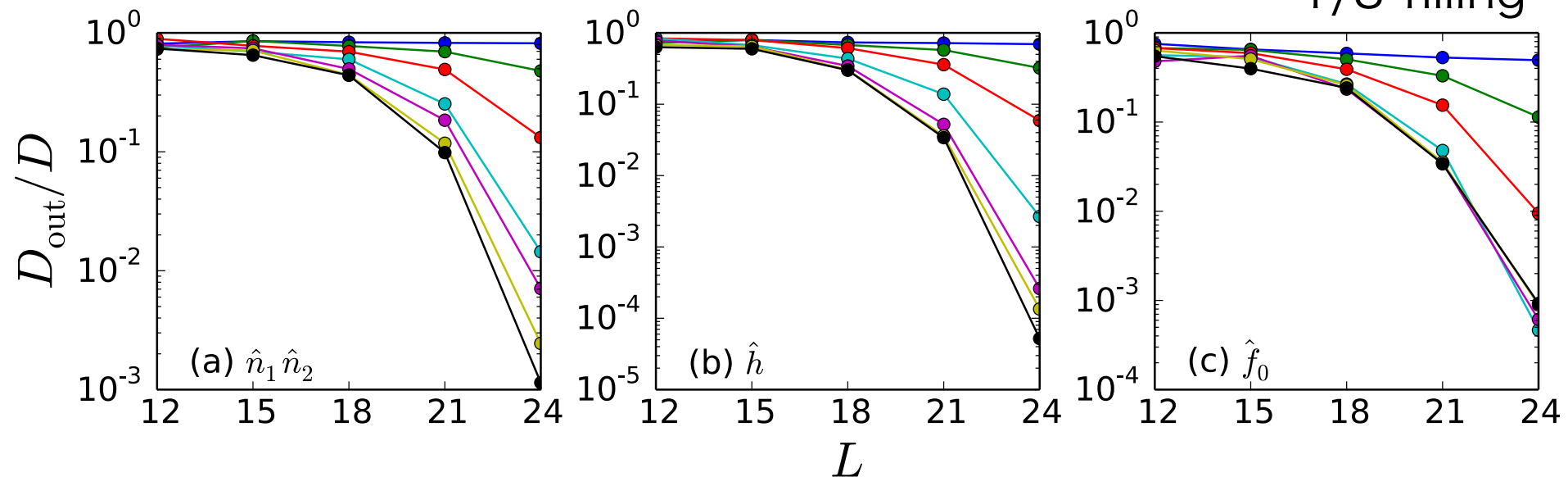
強いETHは成立しない

結果：強いETH (XXX模型)

$$\hat{\mathcal{H}}_{XXX} := \frac{1}{1+\lambda} [\hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda \hat{W}]$$

λ : 非可積分性の指標

1/3 filling

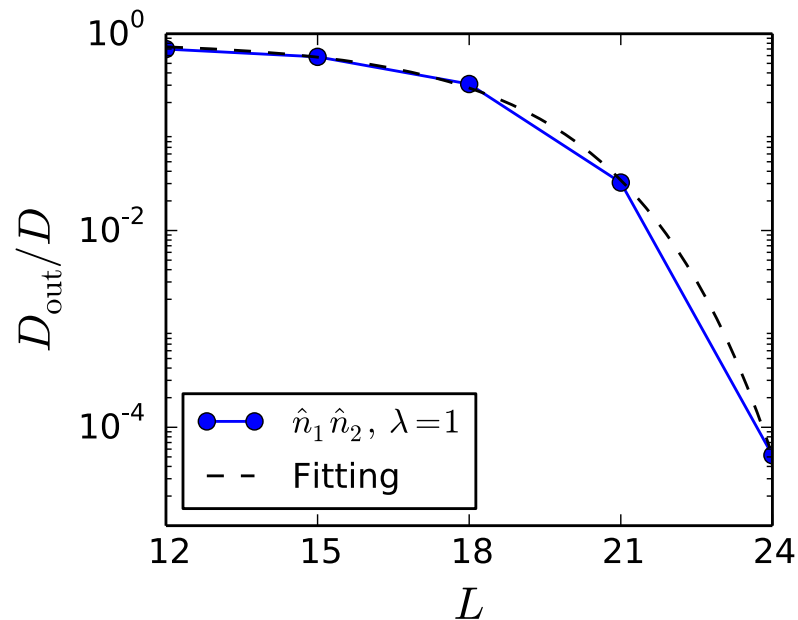
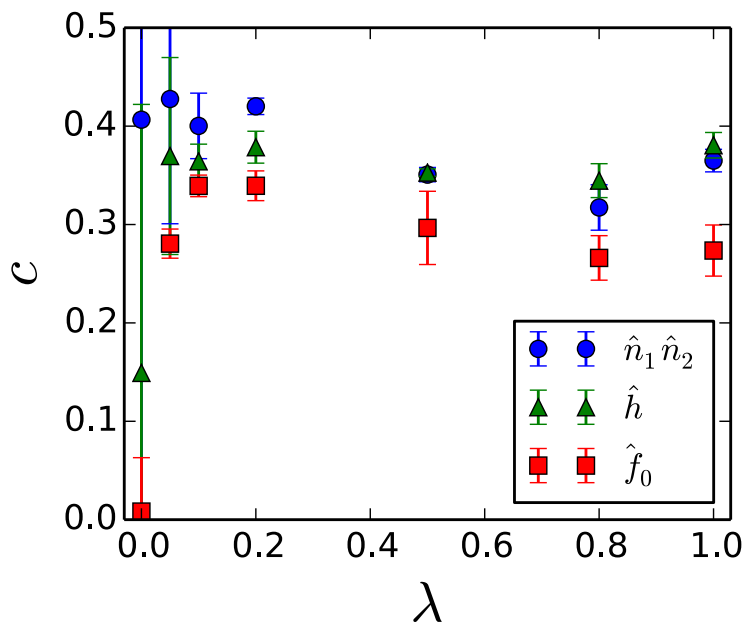


いずれの物理量でも, $\lambda > 0$ で上に凸の減少関数

→ $\lambda > 0$ で強いETHが成立

二重指数関数的な振る舞い

D_{out}/D が二重指数関数で減少しているように見えたため
 $f(L) := a \exp(-b \exp(cL))$ でフィッティング



- 小さな非可積分項で強いETHが成立
- 近可積分系でも熱化する

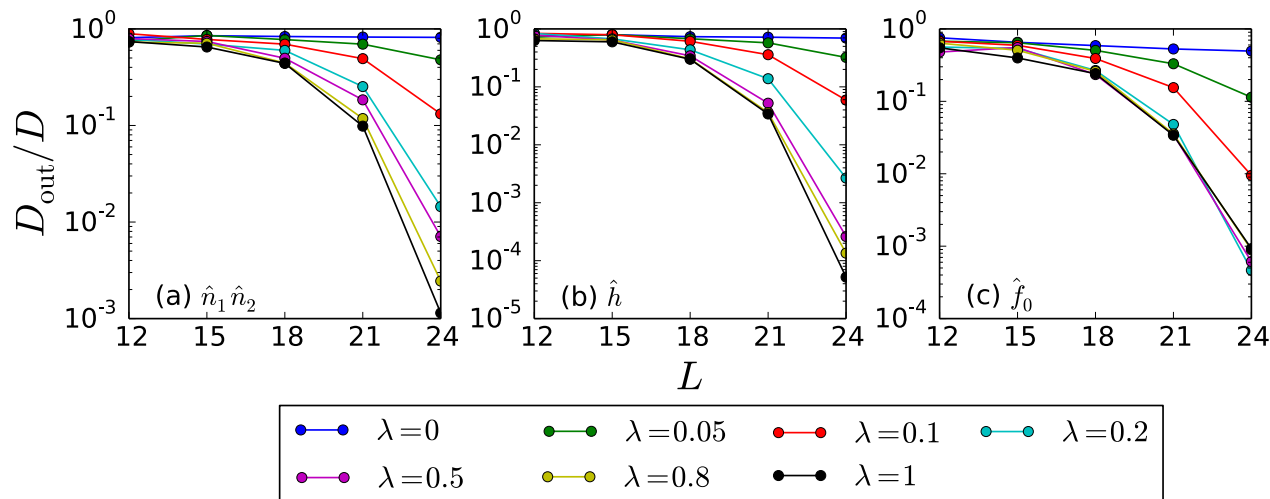
Part 1 まとめ

T. Yoshizawa, E. Iyoda, and T. Sagawa,
PRL **120**, 200604 (2018)

強いETHの判定のため、
固有状態の大偏差的性質に着目した数値計算を行った

近可積分系を含む非可積分系では強いETHが成立
非熱的状态数の比 D_{out}/D が系のサイズに対して
二重指数関数的に減少することを明らかにした

強いETHが近可積分系で成立するのは
準位統計の結果と整合的である



Outline

- **1. 熱平衡化と固有状態熱化仮説 (ETH)**
 - マクロな不可逆性の起源
 - 固有状態熱化仮説：大偏差解析による数値計算, 典型性
- **2. 量子情報の非局所化 (スクランブリング)**
 - 「カオスの上限」と非可積分性
 - 三体相互情報量, 初期状態依存性
 - XXX模型と Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型
 - clean SYK模型を含むSYK-like模型:Wishart SYK模型
 - 基底状態の縮退
- **Summary**

量子カオス vs スクランブリング

量子カオス

- ・ エネルギー準位統計: 非可積分系でのみWigner-Dyson分布
- ・ 強いETH: 非可積分系でのみ成立

$$O_j := \langle E_j | \hat{O} | E_j \rangle \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{MC}}$$

スクランブリング: 量子情報の非局所化

ブラックホールの情報パラドックスの文脈で重要

- 指標:
1. 非時間順序相関関数の減衰
Decay of out-of-time-ordered correlator (OTOC)
 2. 負の三体相互情報量
Negativity of tripartite mutual information (TMI)

スクランブリングとブラックホール

ブラックホールの情報パラドックス

ブラックホール = fast scrambler

ホログラフィック理論によるアプローチ

古典重力 ↔ 量子系

“A bound on chaos” 「カオスの上限」

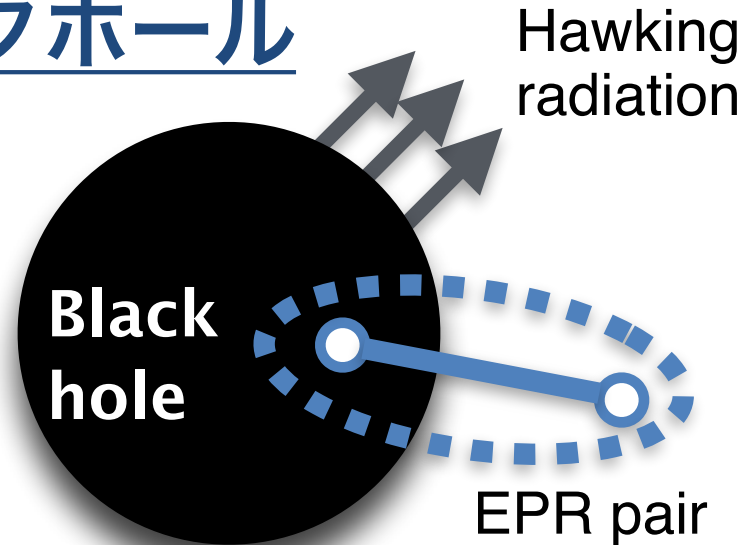
$$\lambda_L \leq \frac{2\pi}{\beta} \quad \lambda_L : \text{OTOCの減衰率}$$

→ スクランブリング : "chaotic"

上限を満たす例: 共形場理論や**SYK模型**のある極限

Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型: "nearly holographic dual" of AdS₂

Maldacena and Stanford, PRD (2016)



Maldacena, Shenker, and Stanford,
JHEP 08, 106 (2016)

Tsuji, Shitara, and Ueda,
arXiv:1706.09160

Motivation and question

スクランブリング = 量子情報の非局所化: "chaotic"

従来の量子カオス

非可積分性が重要

Wigner-Dyson準位統計や

強いETHは非可積分系のときのみ成り立つ

Q. スクランブリングには非可積分性は重要か？

→ 量子多体系の三体相互情報量を数値計算

**A. 長時間領域でスクランブリングは非可積分性によらず
(ほとんどの状態で)生じる**

三体相互情報量

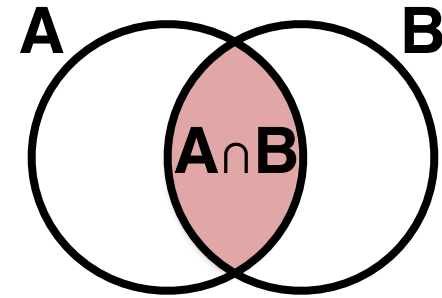
Hosur, Qi, Roberts, Yoshida,
JHEP 02, 004 (2016)
Cerf and Adami,
Physics D, 120, 62(1998)

- **von Neumann entropy** $S_X := \text{tr}[-\hat{\rho}_X \ln \hat{\rho}_X]$
 $\hat{\rho}_X$: 領域Xの縮約密度行列

- **二体相互情報量 (Bipartite Mutual Info.)**

$$I_2(A : B) := S_A + S_B - S_{AB}$$

AとBの間の相関

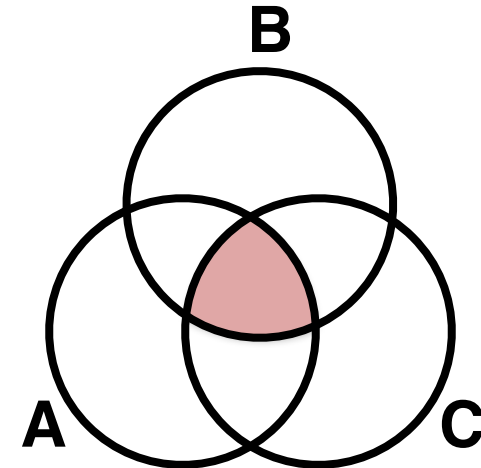


- **三体相互情報量 (Tripartite Mutual Info.)**

$$I_3(A : B : C)$$

$$:= S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC}$$

$$= I_2(A : B) + I_2(A : C) - I_2(A : BC)$$



負の三体相互情報量：非局所化

例：3つの古典ビット

1. $x = y = z$ x :random $\rightarrow I_3 = \ln 2$ (三体相関)
2. x, y, z :random, independent $\rightarrow I_3 = 0$ (三体相関無し)
3. $x = y \oplus z$ y, z :random, independent $\rightarrow I_3 = -\ln 2$

y も z も単体では x と相関していないが
合成系 yz は x と相関している

$\rightarrow x$ に関する情報が y と z に非局所化している

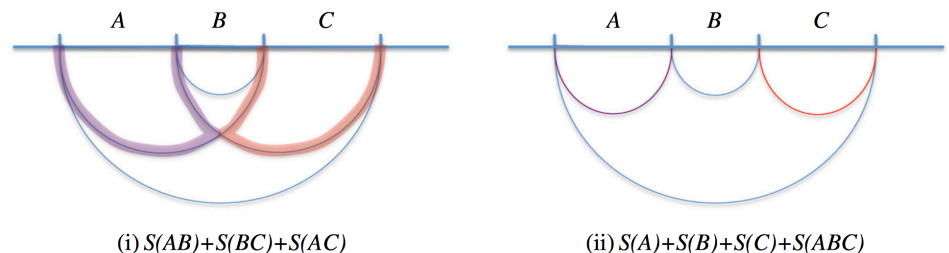
三体相互情報量が負： $I_2(X : Y) + I_2(X : Z) < I_2(X : YZ)$

\rightarrow **スクランブリング**: 量子情報の非局所化

Cf. 笠-高柳公式が成り立つと

$$\rightarrow I_3 \leq 0$$

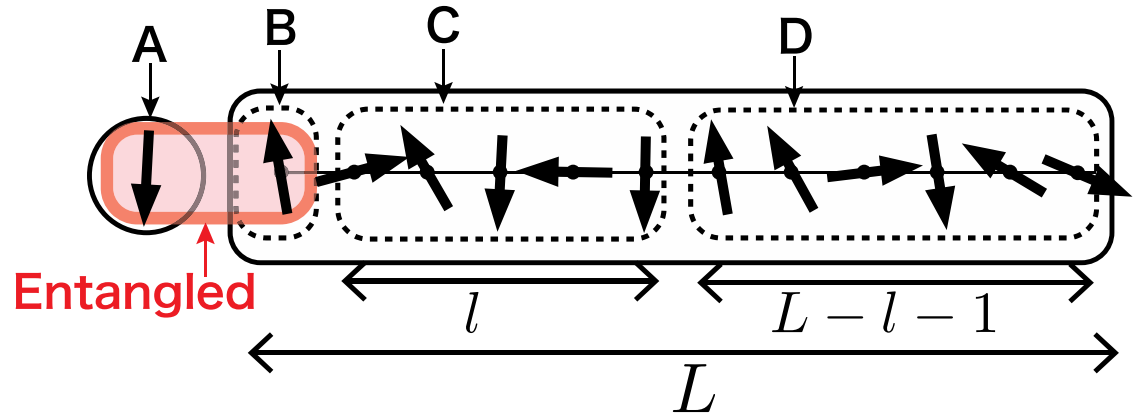
Hayden, Headrick, Maloney,
PRD 87, 046003 (2013)



Setup

扱う全系のスケッチ:

- 量子ビット A
- 量子多体系 BCD



1. 初期状態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes |\Xi\rangle_{BCD}$

2. CNOTゲート (A:コントロール, B:ターゲット)

$$\hat{U}_{\text{CNOT}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) |0\rangle_B = |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B$$

→ Aの情報をエンタングルメントを通してBにエンコード

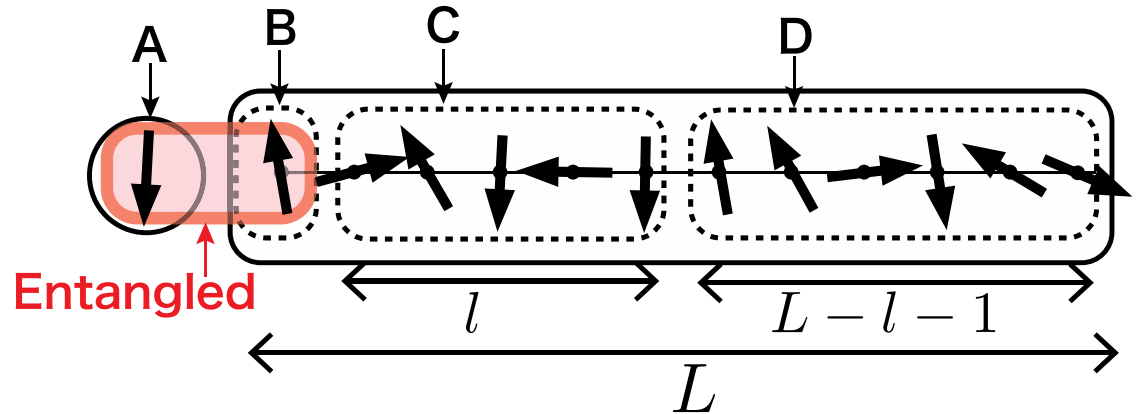
3. BCDのみがハミルトニアンで時間発展

このセットアップで $I_3(A : B : C)$
のダイナミクスを計算

Setup

扱う全系のスケッチ:

- 量子ビット A
- 量子多体系 BCD



量子多体系 BCD

1. 量子スピン鎖

- **1d XXX Heisenberg 模型 + 次近接相互作用**
- (1d 横磁場Ising模型) → 可積分性
- (1d XXX Heisenberg model with disordered magnetic field)

2. Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

- 全結合, 4体相互作用, complex fermions
- disordered or clean couplings

Numerical results: 1. 量子スピン鎖

二体相互情報量 (BMI)

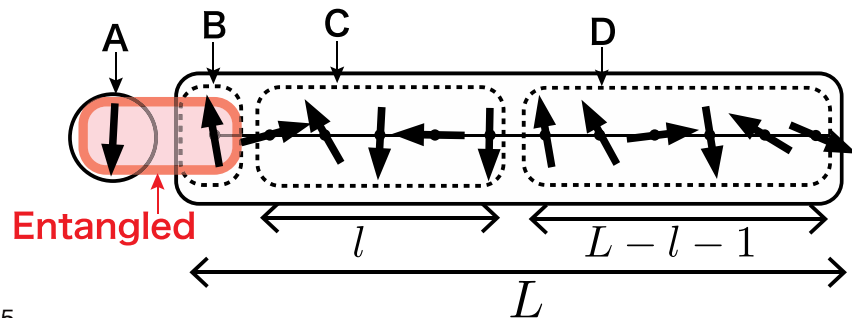
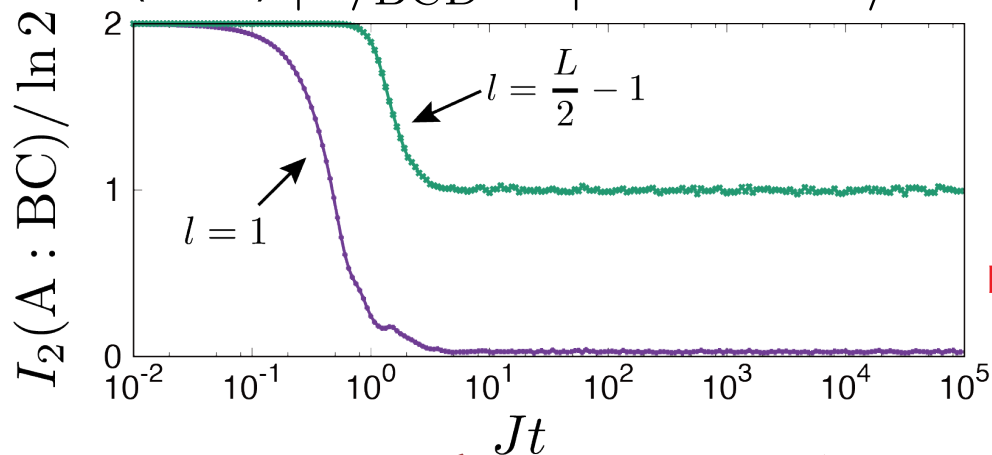
$$\hat{H}_{\text{spin}} := J \sum_{\langle i,j \rangle} H_{ij} + J' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} H_{ij} \quad H_{ij} = \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_j^x + \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_j^y + \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z$$

nearest neighbor next nearest neighbor (n.n.n.)

→ n.n.n. の相互作用：可積分性を破るパラメタ
非可積分: $J' > 0$ 可積分: $J' = 0$

非可積分 XXX 模型の二体相互情報量

(Néel) $|\Xi\rangle_{\text{BCD}} = |0101 \cdots 01\rangle$ $L = 14, J' = 0.8J$



→ エンタングルメントがballisticに伝わる

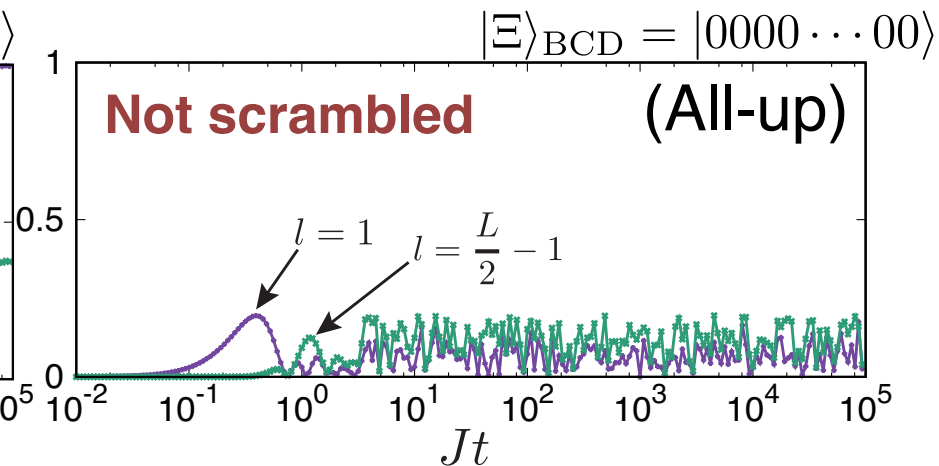
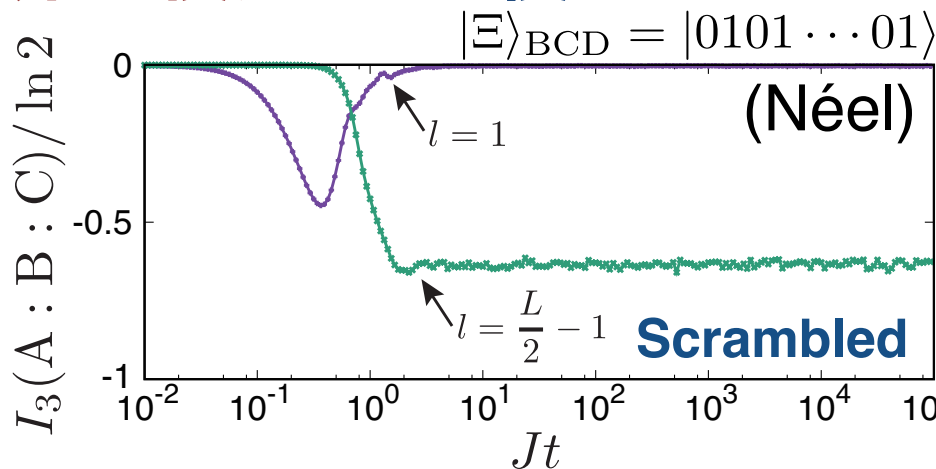
(初期状態や可積分性にはよらない)

Numerical results: 1. 量子スピン鎖

三体相互情報量 (TMI)

非可積分 XXX 模型

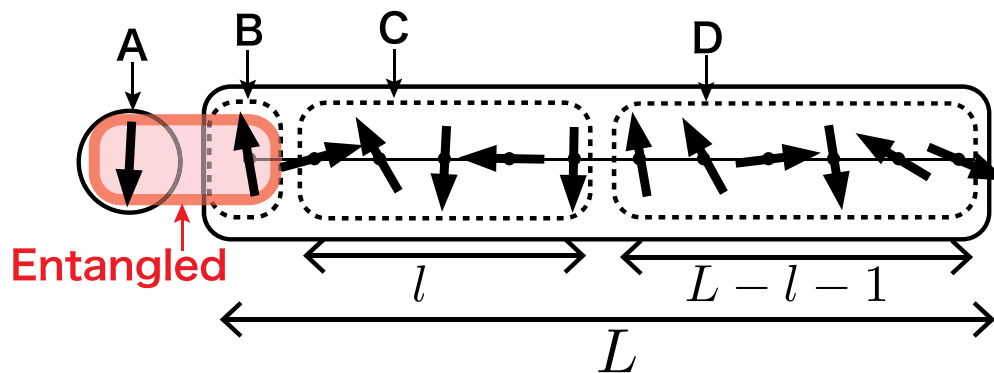
$$L = 14, J' = 0.8J$$



正の三体相互情報量: not scrambled

→ z方向の全磁化の保存のため,

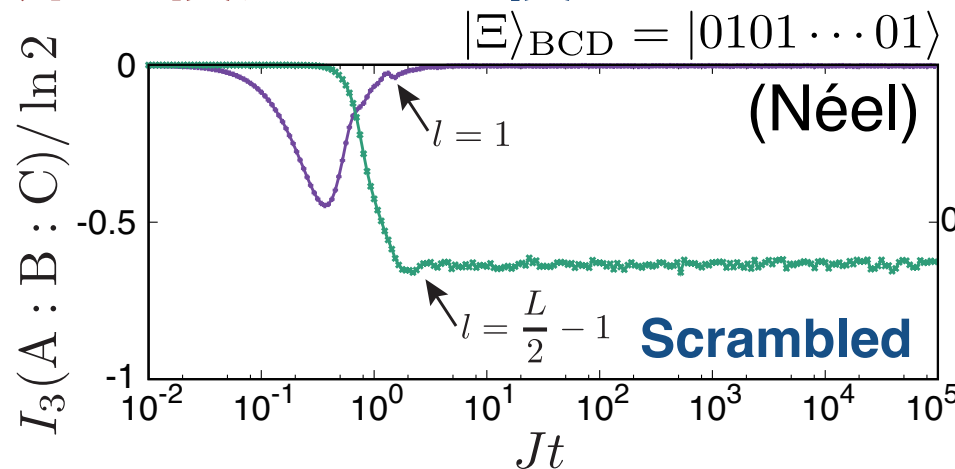
ダイナミクスが小さいサブスペースに制限されている



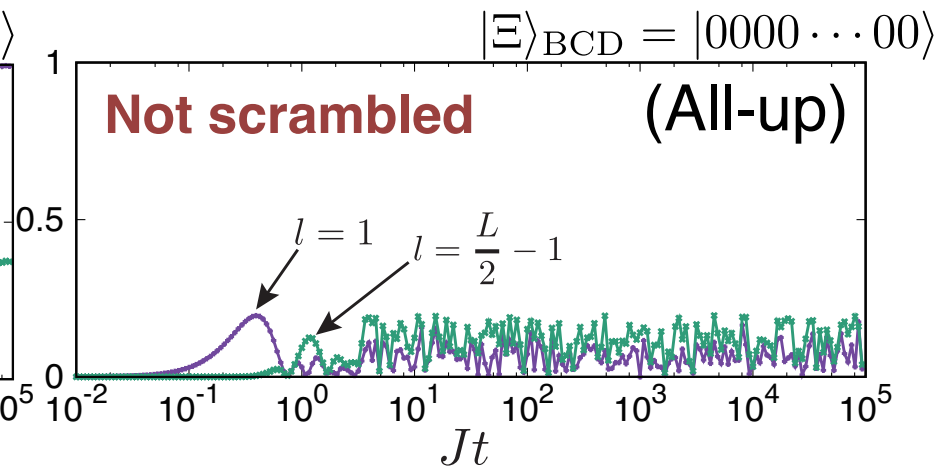
Numerical results: 1. 量子スピン鎖

三体相互情報量 (TMI)

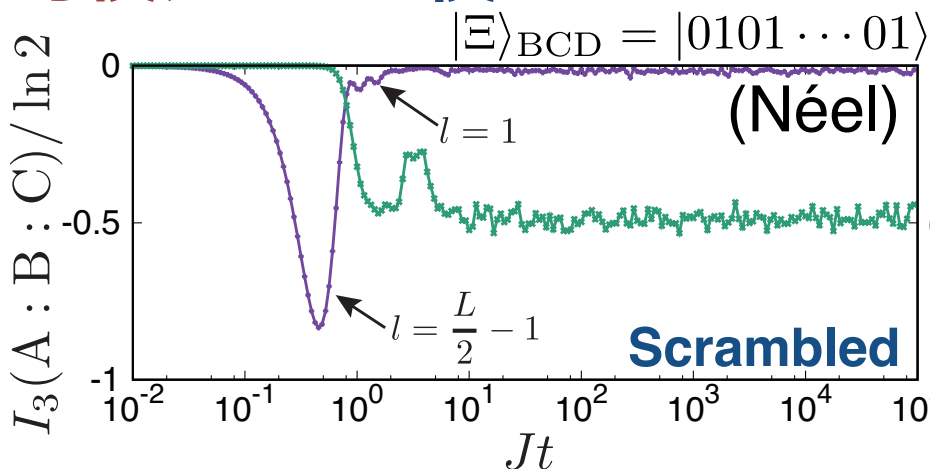
非可積分 XXX 模型



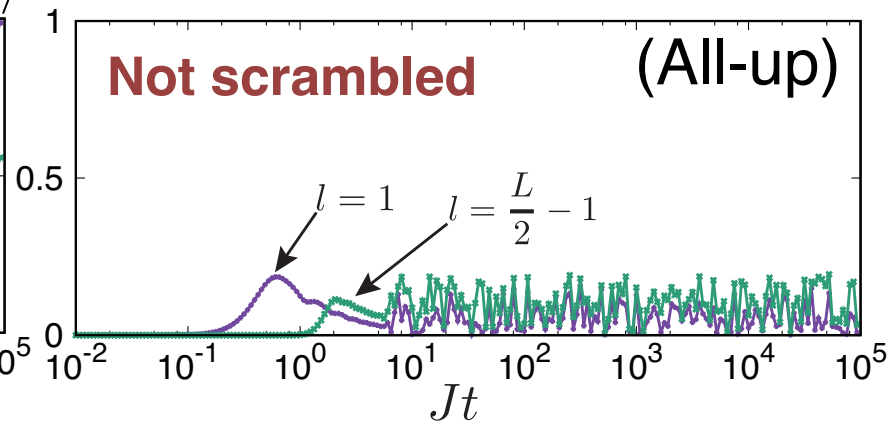
$$L = 14, J' = 0.8J$$



可積分 XXX 模型



$$L = 14, J' = 0$$



→ スクランブリングは可積分性によらず生じる

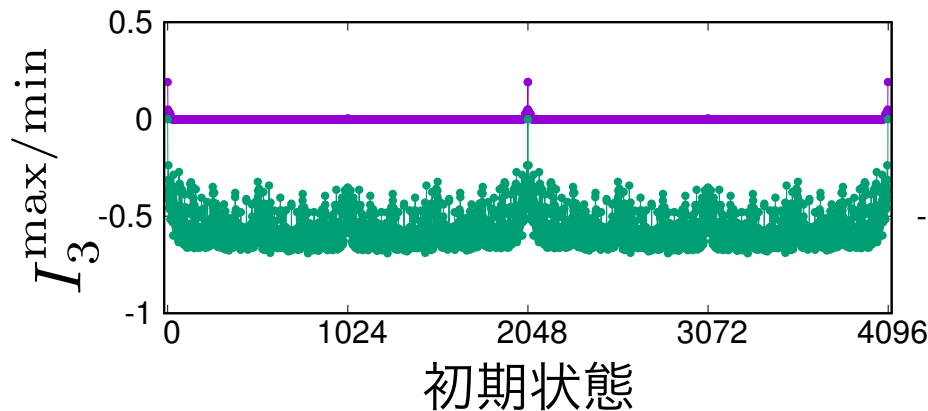
Numerical results: 1. 量子スピン鎖

初期状態依存性

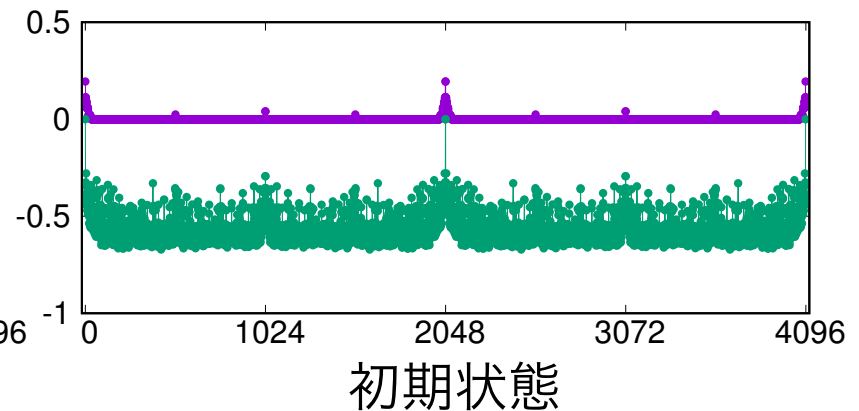
$L = 12$ $|\Xi\rangle_{\text{BCD}}$: 2^L 個の計算基底

$I_3^{\text{max/min}}$ 三体相互情報量の $0 \leq Jt < 10^5$ における最大(小)値

非可積分



可積分



スクランブリングはほぼ全ての初期状態で起きる

例外: $|000 \dots 0\rangle, |100 \dots 0\rangle, |011 \dots 1\rangle, |111 \dots 1\rangle$

1d横磁場Ising模型 \rightarrow すべての初期状態で非局所化が生じる
z方向の全磁化が保存しないため

Numerical results: 2. SYK 模型

Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型

$$\hat{H}_{\text{SYK}} := \frac{1}{(2L)^{3/2}} \sum_{i,j,k,l} J_{ij;kl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l$$

Kitaev, Talks at KITP (2015)

Sachdev, PRX (2015)

Maldacena and Stanford, PRD (2016)

$J_{ij;kl}$: complex Gaussian with variance J^2

$$J_{ij;kl} = -J_{ji;kl} = -J_{ij;lk} = J_{lk;ji}^*$$

Note

1. Kitaev : Majorana fermionsのSYK模型を導入

→ tractable or "solvable" in large- $N(L)$ limit Maldacena and Stanford,
PRD (2016)



2. Complex fermionsのSYK模型も同様

Sachdev, PRX (2015)

→ 以下ではcomplex fermionsのSYK模型を扱う

Numerical results: 2. SYK 模型

SYK模型の三体相互情報量

$$\hat{H}_{\text{SYK}} := \frac{1}{(2L)^{3/2}} \sum_{i,j,k,l} J_{ij;kl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l$$

Kitaev, Talks at KITP (2015)

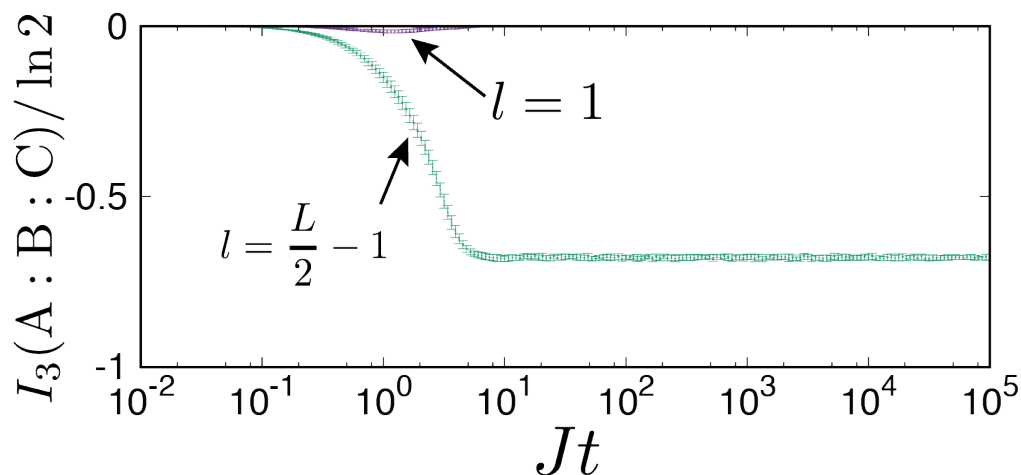
Sachdev, PRX (2015)

Maldacena and Stanford, PRD (2016)

$J_{ij;kl}$: complex Gaussian with variance J^2

$$J_{ij;kl} = -J_{ji;kl} = -J_{ij;lk} = J_{lk;ji}^*$$

SYK模型の三体相互情報量



$$L = 14$$

16 サンプル

$$|\Xi\rangle_{\text{BCD}} = |0101 \cdots 01\rangle$$

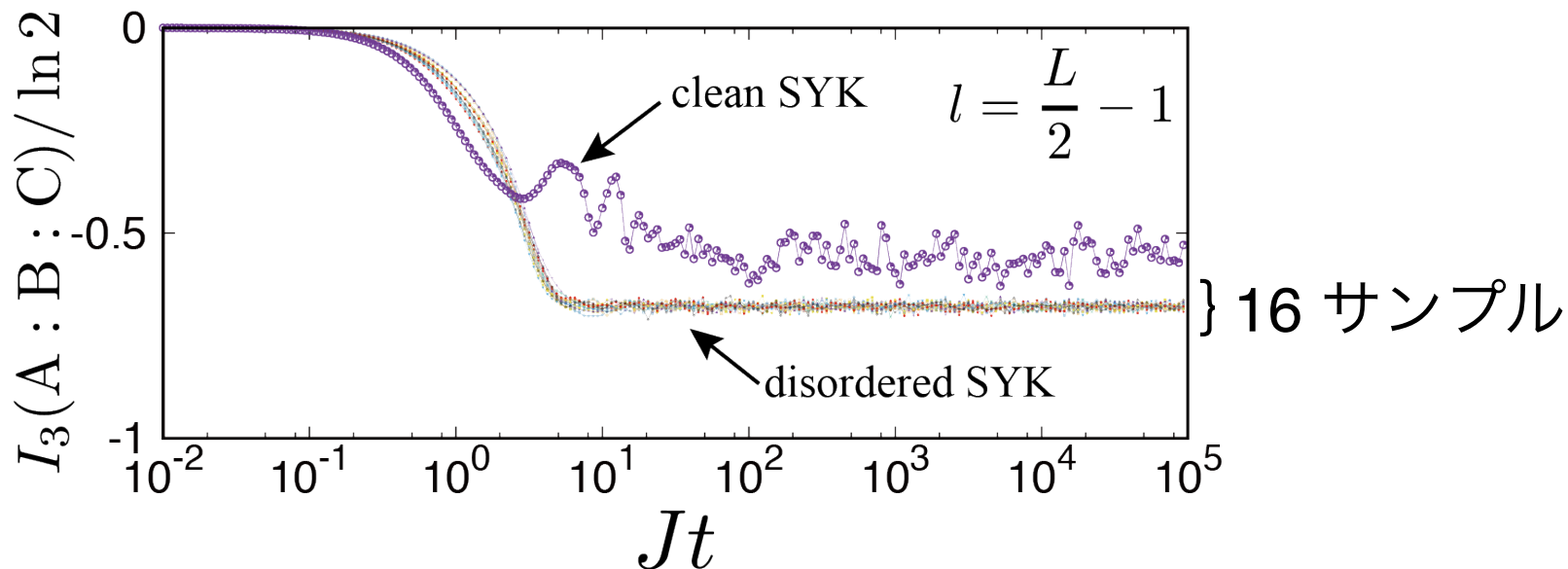
乱れ(disorder)はスクランブリングを遅くしない

→ 多体局在 (MBL) の遅い情報伝搬とは対照的

Numerical results: 2. SYK 模型

乱れのない (clean) SYK 模型

Clean SYK 模型 $J_{ij;kl} \equiv J$ ($i > j, k > l$)



乱れのある(普通の)SYK模型は

1サンプルレベルで滑らかにスクランブリングを起こす

Clean SYK模型：緩和後に大きな時間ゆらぎ

Clean SYK模型の時間ゆらぎの起源

SYK模型の亜種を導入し, clean SYKのゆらぎの起源を調べる

Wishart SYK 模型 (fermions/bosons)

[E. Iyoda](#), H. Katsura, and T. Sagawa, arXiv:1806.10405

→ Clean SYK模型を特殊な場合として含む

Clean SYK模型の時間ゆらぎの起源

SYK模型の亜種を導入し, clean SYKのゆらぎの起源を調べる

Wishart SYK 模型 (fermions/bosons)

E. Iyoda, H. Katsura, and T. Sagawa, arXiv:1806.10405

→ Clean SYK模型を特殊な場合として含む

Ref. SYK模型の亜種・拡張の例 (高エネルギー/物性)

Non-fermi液体 etc

q-point interactions

Maldacena and Stanford, PRD (2016)

SUSY extensions

Fu et al., PRD (2017)

Sannomiya et al., PRD (2017)

Peng et al., JHEP (2017)

Li et al., JHEP (2017)

Kanazawa and Wetting, JHEP (2017)

disorder-free tensor models

Peng et al., JHEP (2017)

Witten, arXiv: 1610.09758 (2016)

lattice structure

Jian and Yao, PRL (2017)

Gu et al., JHEP (2017)

Berkooz et al., JHEP (2017)

coupled or perturbed system

Song et al., PRL (2017); Chen et al., PRL (2017)

Bi et al., PRB (2017); Chen et al., JHEP (2017)

Garcia-Garcia et al., JHEP (2017)

Garcia-Garcia et al., PRL (2018)

Zhang and Zhai, PRB (2018)

Proposal for experiments

Danshita et al., PTEP (2017)

Wishart SYK模型

E. Iyoda, H. Katsura, and T. Sagawa, arXiv:1806.10405

$$H_{\text{wSYK}} := Q^\dagger Q \quad Q := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k < l \leq N} J_{k,l} c_k c_l$$

$J_{k,l}$: complex Gaussian (mean= \bar{J} , variance= J^2)

c_k : complex fermions の消滅演算子

Note

1. 粒子数保存 $N_P := \sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_i$

2. $\bar{J} \neq 0, J = 0$ のとき clean SYK に帰着

3. Positive semidefinite \rightarrow エネルギー固有値が非負

4. ハードコアボソンについても同様に定義可能

replace $c_k \rightarrow b_k$ $[b_i, b_j^\dagger] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = [b_i, b_j] = 0$ for $i \neq j$
 $\{b_i, b_i\} = \{b_i^\dagger, b_i^\dagger\} = 0$ and $\{b_i, b_i^\dagger\} = 1$

基底状態の大きな縮退

$$N = 16$$

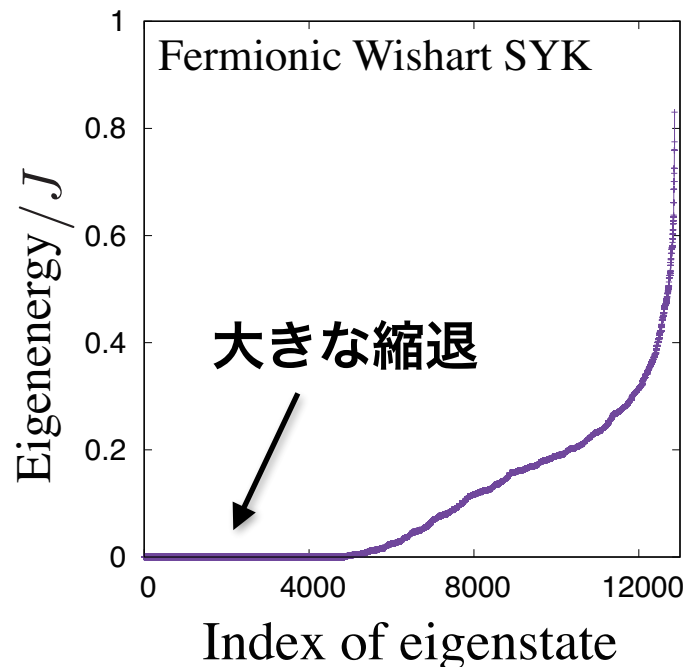
$$N_P = 8$$

$$\text{粒子数 } N_P \leq \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$$

→基底状態に大きな縮退

示量的な残留エントロピー

$$\text{縮退度} : C(N, N_P) - C(N, N_P - 2)$$



縮退によって有効次元が小さくなる → ゆらぎの増大に寄与

Ref. 物理量の時間ゆらぎ

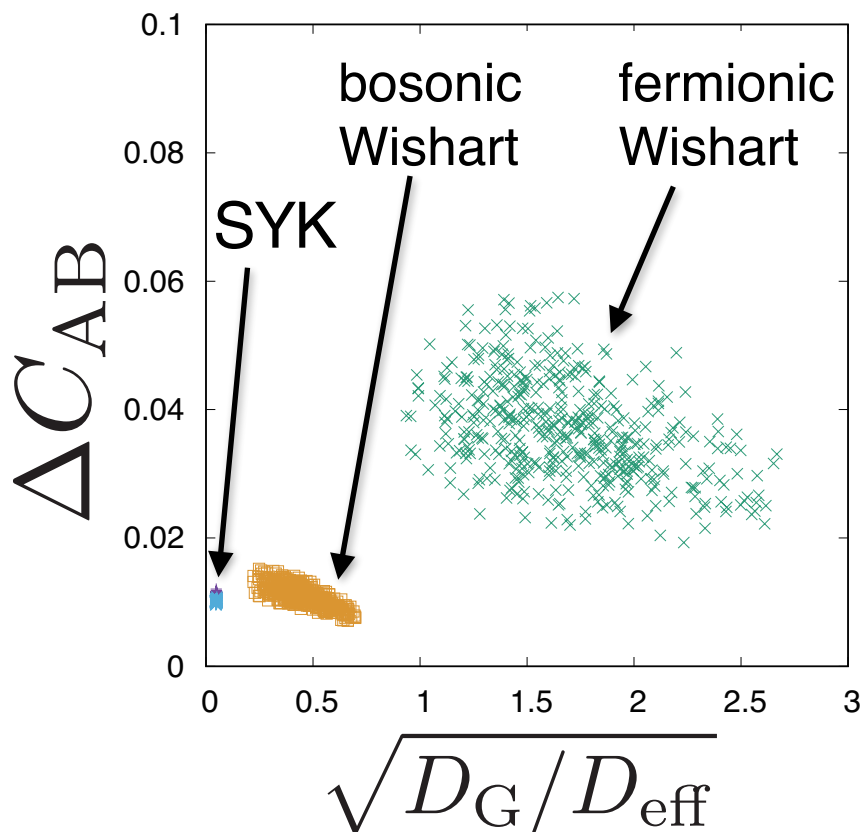
$$(\Delta O)^2 \leq \|\hat{O}\| \frac{D_G}{D_{\text{eff}}}$$

D_G : エネルギーギャップの最大縮退度

OTOCの時間ゆらぎについても同様の不等式が期待される (証明はできていない)

OTOC vs 有効次元

$$C_{AB}(t) := \langle \Psi | A^\dagger(t) B^\dagger(0) A(t) B(0) | \Psi \rangle$$
$$A = c_1 (b_1)$$
$$B = c_1^\dagger (b_1^\dagger)$$



初期状態を
全ての計算基底について計算

$$(\Delta C_{AB})^2 \leq C \frac{D_G}{D_{\text{eff}}}$$

はOTOCの場合にも
成立していると期待

エネルギー準位統計

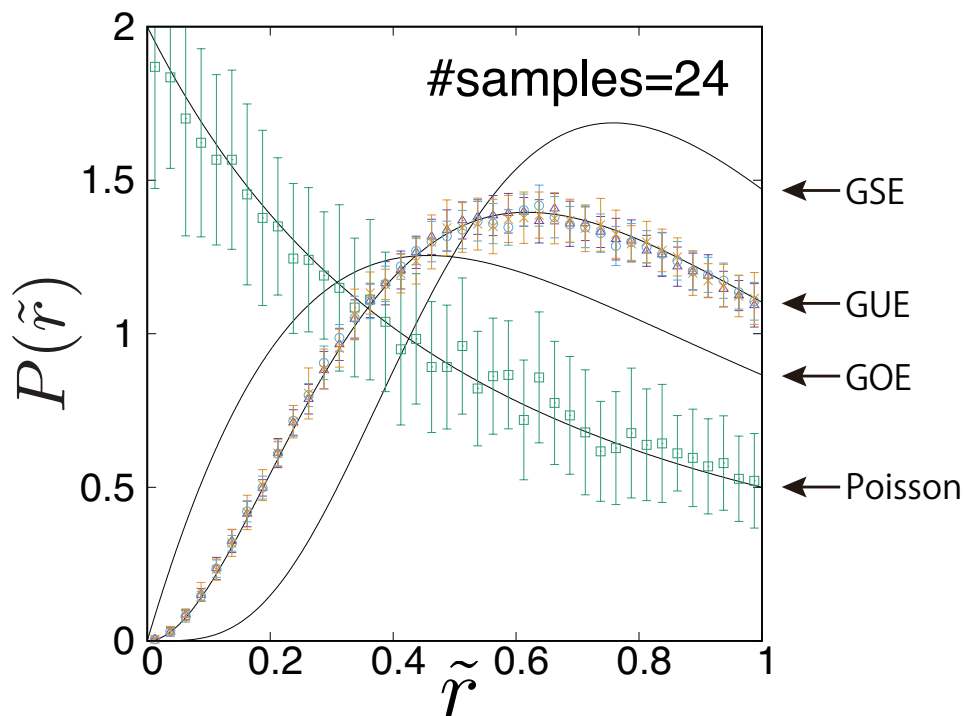
可積分：Poisson分布

非可積分：Wigner-Dyson分布 (GOE, GUE, GSE)

SYK, SUSY SYKは量子カオスの (GUE) You et al, PRB (2017)

Kanazawa and Wetting, JHEP (2017)

Wishart SYKの準位統計



$$N = 16 \quad N_P = N/2$$

SYK: GUE

Bosonic Wishart: GUE

($N_P = N/2 + 1$ の時のみGOE)

Fermionic Wishart: Poisson

Fermionic Wishart SYK模型の可積分性

$$H_{\text{wSYK}} := Q^\dagger Q \quad Q := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k < l \leq N} J_{k,l} c_k c_l$$

簡単のため N が偶数で $J_{k,l}$ が実とする. $M := N/2$

1. J の歪対称性より J をブロック対角化できる

2. 新しいfermionを導入

$$(f_{1,\uparrow}, f_{1,\downarrow}, \dots, f_{M,\uparrow}, f_{M,\downarrow})$$

$$:= (c_1, c_2, \dots, c_{2M-1}, c_{2M}) O$$

$$O^T J O = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \lambda_{N/2} \\ & & & & -\lambda_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. ハミルトニアンが代数的Bethe仮設で解けることが知られている

Richardson-Gaudin模型に帰着

Richardson, J. Math. Phys. (1965)
Balantekin, PRC (2007)

$$H_{\text{wSYK}} = \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j f_{j,\downarrow}^\dagger f_{j,\uparrow}^\dagger \right) \left(\sum_{k=1}^M \lambda_k f_{k,\uparrow} f_{k,\downarrow} \right)$$

Part 2 まとめ

情報の非局所化 (スクランブリング) を
三体相互情報量を用いて数値的に調べた

E. Iyoda and T. Sagawa,
Phys. Rev. A **97**, 042330 (2018)

1. 可積分性によらず非局所化が生じる (少数の例外的な初期状態あり)

→ 従来の量子カオスとは別のもの

	Scrambled ($I_3 < 0$)	Not scrambled ($I_3 > 0$)
Non-integrable	XXX+ J' (Néel) TFI+ h_z (Néel, all-up)	XXX+ J' (all-up)
Integrable	XXX (Néel) TFI (Néel, all-up) Clean SYK (Néel)	XXX (all-up) Clean SYK (all-up)
Disordered	MBL (Néel) Disordered SYK (Néel)	MBL (all-up) Disordered SYK (all-up)

2. SYKモデルではdisorderによってスクランブリングは滑らかに

Wishart SYKモデルを導入：clean SYKを特別な場合として含む

基底状態の縮退により有効次元が減少 → ダイナミクスに影響

Fermionic Wishart SYK：可積分

E. Iyoda, H. Katsura, and T. Sagawa,
arXiv:1806.10405.

Summary

1. 熱化のメカニズムの一つである強いETHの数値検証

keywords: 大偏差解析, 櫻井杉浦法

T. Yoshizawa, E. Iyoda, and T. Sagawa, PRL **120**, 200604 (2018)

- ・ 近可積分系を含む非可積分系で強いETHが成立
- ・ 非熱的状态数の比率 D_{out}/D が二重指数関数的に減衰

2. 情報の非局所化を三体相互情報量を用いて数値的に調べた

E. Iyoda and T. Sagawa, PRA **97**, 042330 (2018)

- ・ 非局所化 (スクランブリング) は可積分性によらず生じる
- ・ SYKモデルではdisorderが非局所化のダイナミクスを滑らかに
- ・ Disorderの役割→Wishart SYKモデル

E. Iyoda, H. Katsura, and T. Sagawa, arXiv:1806.10405

→ 基底状態の大きな縮退による有効次元の低下